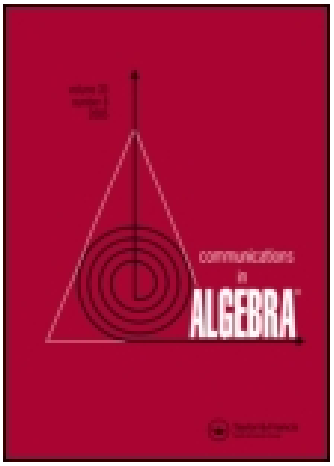

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.tandfonline.com/loi/lagb20

Sur Les Train Algèbres De Degré Quatre: Structures Et Classifications

Cristián Mallol [a], Michelle Nourigat [b] & Richard Varro [b]
[a] Department of Mathematical Engineering , U.F.R.O , Temuco, Chile
[b] Department of Mathematics and Informatics , U.P.V , Montpellier, France
Published online: 09 Feb 2009.

Communications in Algebra®, 37: 532–547, 2009

ISSN: 0092-7872 print/1532-4125 online
DOI: 10.1080/00927870802251146

SUR LES TRAIN ALGÈBRES DE DEGRÉ QUATRE: STRUCTURES ET CLASSIFICATIONS

Cristián Mallol[1], Michelle Nourigat[2], and Richard Varro[2]
[1]*Department of Mathematical Engineering, U.F.R.O, Temuco, Chile*
[2]*Department of Mathematics and Informatics, U.P.V, Montpellier, France*

We study train algebras of fourth degree, give some genetic examples and explicit the plenary train identities associated. These algebras fall ultimately into four classes; the first two of them do not have 1/2 as train root and thus have idempotents. For these types we provide structure theorems, which are then used for classification purposes in small dimensions.

Key Words: Peirce Decomposition; Plenary train algebras; Principal train algebras.

2000 Mathematics Subject Classification: 17D92.

1. INTRODUCTION

Une algèbre pondérée est une paire (A, ω) formée d'une K-algèbre A sur un corps commutatif K et d'un morphisme non nul d'algèbres $\omega : A \to K$, appelé pondération de A. Cette notion, introduite par Etherington (1940/1945), est à la base de l'étude de nombreuses algèbres non associatives qui interviennent dans la modélisation algèbrique de la Génétique (cf. Lyubich, 1992; Lynn Reed, 1997; Worz-Busekros, 1980).

Étant donnée une K-algèbre commutative pondérée (A, ω), pour $x \in A$ on définit $L_x : A \to A$, $z \mapsto xz$ et les puissances principales de $x \in A$ par $x^{k+1} = L_x^k x$.

Une algèbre commutative pondérée (A, ω) est une train algèbre de degré n si et seulement si tout élément x de A vérifie l'identité ω-polynomiale:

$$x^n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \omega(x)^{n-k} x^k = 0,$$

l'entier $n \geq 2$ pour lequel cette identité est vérifiée étant minimal.

On a: $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = 1$. Par ailleurs, on sait qu'une algèbre pondérée (A, ω) est une train algèbre d'équation $x^n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \omega(x)^{n-k} x^k$ si et seulement si $y^n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y^k$ pour tout $y \in A$, $\omega(y) = 1$. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un polynôme unitaire $T \in K[X]$ de degré $n-1$ tel que $T(L_y)y = 0$ pour tout $y \in A$, $\omega(y) = 1$. La minimalité du degré de la train algèbre entraîne l'unicité de ce polynôme; il est

Received May 14, 2007; Revised January 8, 2008. Communicated by A. Elduque.
Address correspondence to Cristián Mallol, Department of Mathematical Engineering, U.F.R.O, Casilla 54-D, Temuco, Chile; Fax: +56-45-325359; E-mail: cmallol@ufro.cl

appelé le train polynôme de A et les racines de ce polynôme sont appelées les train racines principales.

La structure algèbrique de la décomposition de Peirce des train algèbres de degré n admettant un idempotent est étudiée dans Guzzo (1994) quand les train racines principales sont deux à deux distinctes et dans Gutierrez Fernandez (2000) quand les train racines sont multiples. Pour les train algèbres de degré 4, on sait d'après Lopez-Sanchez and Rodriguez (1996) que si $\frac{1}{2}$ n'est pas train racine alors elles admettent un idempotent et par Mallol and Varro (2002), que si l'une des train racines vaut $\frac{1}{2}$ on ne peut assurer ni l'existence ni la non-existence d'un idempotent, plus précisément il existe dans ce cas, en toute dimension, des train algèbres de degré 4 admettant un idempotent et d'autres pas.

2. EXEMPLES GÉNÉTIQUES

2.1. Hérédité de Deux Caractères Autosomiques Partiellement Liés

Étant donnés, dans une population d'individus diploïdes, deux locus autosomiques partiellement liés d'allèles $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq m}$, si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ est le taux de recombinaison entre ces deux locus, la loi d'algèbre définie sur l'espace engendré par $(a_i \otimes b_j;\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$:

$$(a_i \otimes b_j)(a_p \otimes b_q) = \frac{1-\theta}{2}(a_i \otimes b_j + a_p \otimes b_q) + \frac{\theta}{2}(a_i \otimes b_q + a_p \otimes b_j)$$

modélise les résultats de la méiose à ces deux locus. Etherington (1939) a montré que cette algèbre est train de degré 3 de polynôme $(X-1)(X-\frac{1-\theta}{2})$. Par conséquent la dupliquée commutative de cette algèbre, qui permet d'obtenir la distribution des génotypes dans la descendance, est train de degré 4 de polynôme $X(X-1)(X-\frac{1-\theta}{2})$.

2.2. Hérédité d'un Caractère Di-Allélique à un Locus Autotétraploïde

Considérons chez des individus autotétraploïdes un gène ayant pour allèles a et b. Représentons par $D_k = a^k b^{4-k}$ $(0 \leq k \leq 4)$, l'haplotype d'un gamète qui a k allèles a et $4-k$ allèles b. La loi d'algèbre définie sur l'espace vectoriel de base $(D_0, \ldots, D_4)$ par:

$$D_iD_j = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}\binom{i+j}{k}\binom{4-i-j}{2-k}D_k$$

donne la distribution en fréquences des gamètes de type $D_0, \ldots, D_4$ produit par un individu de génotype $a^{i+j}b^{4-(i+j)}$. Etherington (1939) a établi que cette algèbre est train de polynôme $(X-1)(X-\frac{1}{6})$. On en déduit que son algèbre dupliquée, qui donne la distribution en fréquences de la descendance des croisements $a^{i+j}b^{4-(i+j)} \times a^{p+q}b^{4-(p+q)}$, est train de degré 4 et de polynôme $X(X-1)(X-\frac{1}{6})$.

2.3. Migration Entre Trois Populations

On considère des types génétiques $a_1, \ldots, a_n$, présents dans une population subdivisée en trois colonies entre lesquelles ont lieu des migrations. Pour tout

$1 \le i, j \le 3$, $i \ne j$ on note m_{ij} la proportion par génération d'individus qui migrent de la colonie j vers la colonie i et on pose $m_{ii} = 1 - \sum_{k\ne i} m_{ki}$; on a donc $0 \le m_{ij}$ et $\sum_{1\le k\le 3} m_{ki} = 1$. On associe à cette population le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A de base $(e_{11}, e_{21}, e_{31}, \ldots, e_{1n}, e_{2n}, e_{3n})$ et dans cette base la matrice $M = diag(M_0, \ldots, M_0)$ où $M_0 = (m_{ij})_{1\le i,j\le 3}$. On munit A de la stucture algèbrique suivante: $e_{ip}e_{jq} = \frac{1}{2}M(e_{ip} + e_{jq})$. Alors A est une algèbre de mutation (cf. Mallol and Varro, 2002) et si $x(t) \in A$ est une distribution de fréquence à la génération t des types génétiques considérés, on a $x(t+1) = x(t)^2 = Mx(t)$. Par définition M et M_0 ont le même polynôme minimal; comme pour tout $x \in A$, $\omega(x) = 1$, on a $M(x) = x^2$, $M^2(x) = 2x^3 - x^2$ et $M^3(x) = 4x^4 - 2x^3 - x^2$ on en déduit que si le polynôme minimal de M_0 est de degré 3 alors l'algèbre A est train de degré 4.

3. IDENTITÉS AUX PUISSANCES PLÉNIÈRES ASSOCIÉES

On suppose que K est un corps commutatif de caractéristique $\ne 2$.

Dans une algèbre A, l'opérateur d'évolution est l'application $E : A \to A$, $x \mapsto x^2$. On définit les puissances plénières de $x \in A$: $x^{[k+1]} = E^k(x)$.

Definition 1. Une algèbre pondérée (A, ω) est une train algèbre plénière de degré n s'il existe $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in K^{n-1}$ tel que pour tout $x \in A$:

$$x^{[n]} - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \omega(x)^{2^{n-k}} x^{[k]} = 0,$$

l'entier $n \ge 2$ pour lequel cette identité est vérifiée étant minimal.

De même que pour les train algèbres, on a $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = 1$ et pour montrer qu'une algèbre A vérifie l'identité $x^{[n]} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \omega(x)^{2^{n-k}} x^{[k]}$ il faut et il suffit d'établir que: $y^{[n]} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k y^{[k]}$ pour tout $y \in A$ tel que $\omega(y) = 1$. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un polynôme unitaire $P \in K[X]$ de degré $n-1$ tel que $P(E)(y) = 0$ pour tout $y \in A$, $\omega(y) = 1$. De plus, si l'on a $P(X) = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k X^k$ et $Q(X) = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \gamma_k X^k$ tels que $P(E)(y) = Q(E)(y) = 0$ pour tout $y \in \omega^{-1}(1)$, alors on a $\sum_{k=0}^{n-2} (\beta_k - \gamma_k) y^{[k+1]} = 0$ et l'existence d'un entier k tel que $\beta_k - \gamma_k \ne 0$ contredirait le degré de la train algèbre plénière A. Il s'ensuit que ce polynôme unitaire P associé à la train algèbre plénière est unique; on l'appelle le train polynôme des puissances plénières et ses racines sont appelées les train racines plénières.

Etherington (1941) a démontré qu'une train algèbre de polynôme $(X-1)(X-\alpha)$ est train plénière de polynôme $(X-1)(X-2\alpha)$. Nous allons voir que pour les trains algèbres de degré 4 la situation est plus complexe. Or, dans Lopez-Sanchez and Rodriguez (1996), les auteurs donnent des ensembles qui contiennent les train racines plénières; dans ce qui suit nous explicitons les train polynômes aux puissances plénières associées aux train algèbres de degré 4.

Proposition 2. *Une train algèbre de polynôme $(X-1)(X^2 - \eta X + \kappa)$ a pour train polynôme aux puissances plénières*:

i) $X^3 - X$, *si* $\eta = -\frac{1}{2}$ *et* $\kappa = 0$;
ii) $X(X-1)(X-2\eta)(X-4\eta^2)$, *si* $\eta \ne -\frac{1}{2}$ *et* $\kappa = 0$;

iii) $(X^2-1)(X^2-(2\eta+1)^2)(X-(2\eta+1)^2)$, *si* $\eta+2\kappa=-\frac{1}{2}$ *et* $\kappa\neq 0$;
iv) $(X-1)^5$, *si* $(\eta,\kappa)=(1,\frac{1}{4})$ *et si* $(x^2-\omega(x)x)^3=0$ *pour tout* $x\in A$;
v) *Enfin,* $(X-1)(X-4\kappa)(X^2-2\eta X+4\kappa)(X^2-4(\eta^2-2\kappa)X+16\kappa^2)$ *dans tous les autres cas.*

Démonstration. Soient $T(X)=X^3-\varepsilon X^2+\delta X+(1-\varepsilon-\delta)=(X-1)(X^2-\eta X+\kappa)$ le train polynôme de (A,ω), L un corps contenant K et ρ, σ les racines du polynôme $X^2-\eta X+\kappa$. L'extension $A_L=L\otimes_K A$ de A sur L est pondérée par $\omega_L:\alpha\otimes x\mapsto \alpha\omega(x)$ et vérifie la relation $x^4=\varepsilon\omega_L(x)x^3+\delta\omega_L(x)^2x^2+(1-\varepsilon-\delta)\omega_L(x)^3x$ pour tout $x\in A_L$.

Si pour $x\in A_L$, $\omega_L(x)=1$, on pose $e_1=x$, $e_2=x^2-x$ et $e_3=x^3-(1+\rho)x^2+\rho x$, d'après (Lopez-Sanchez and Rodriguez, 1996) si $(\rho,\sigma)\neq(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ alors $e_2^3=0$ et en notant $e_4=e_2^2$, $e_5=e_2e_3$ et $e_6=e_2^3$, l'algèbre $[x]$ engendrée par x a pour système générateur: $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ si $(\rho,\sigma)\neq(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ou $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ si $(\rho,\sigma)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et pour structure d'algèbre: $e_1^2=e_1+e_2$, $e_1e_2=\rho e_2+e_3$, $e_1e_3=\sigma e_3$, $e_1e_4=\sigma e_4-e_5$, $e_1e_5=\rho e_5-e_6$, $e_1e_6=\frac{1}{2}e_6$, $e_2^2=e_4$, $e_2e_3=e_5$, $e_2e_4=e_6$, $e_3^2=(\sigma-\rho)e_5+e_6$, les autres produits étant nuls.

Premier cas: $(x^2-x)^3=0$ pour tout $x\in\omega^{-1}(1)$.

Pour tout $x\in\omega^{-1}(1)$, l'application quadratique $E:[x]\to[x]$, $z\mapsto z^2$, induit la transformation des coordonnées:

$$(1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\mapsto\begin{pmatrix}1,1+2\rho\alpha_1,2\alpha_1+2\sigma\alpha_2,\alpha_1^2+2\sigma\alpha_3,\\ -2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2+(\sigma-\rho)\alpha_2^2+2\rho\alpha_4\end{pmatrix}.$$

Le plongement $(1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\mapsto(1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^2,\alpha_3,\alpha_1\alpha_2,\alpha_2^2,\alpha_4)$ permet de définir sur K^8 la linéarisée de Haldane de E (cf. Mc Hale and Ringwood, 1983) de matrice:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\1&2\rho&0&0&0&0&0&0\\0&2&2\sigma&0&0&0&0&0\\1&4\rho&0&4\rho^2&0&0&0&0\\0&0&0&1&2\sigma&0&0&0\\0&2&2\sigma&4\rho&0&4\rho\sigma&0&0\\0&0&0&4&0&8\sigma&4\sigma^2&0\\0&0&0&0&-2&2&\sigma-\rho&2\rho\end{bmatrix}.$$

Cherchons le polynôme minimal μ_M de M, on a deux situations:

a) Si $\rho\sigma=0$.
Pour $(\rho,\sigma)=(-\frac{1}{2},0)$ ou $(0,-\frac{1}{2})$ on a $\mu_M(X)=X^3-X$, soit le résultat (i). Pour $\rho\neq-\frac{1}{2}$ et $\sigma=0$, donc $\eta=\rho$ et $\kappa=0$ on trouve: $\mu_M(X)=X(X-1)(X-2\rho)(X-4\rho^2)$, tandis que pour $\rho=0$ et $\sigma\neq-\frac{1}{2}$ on a: $\mu_M(X)=X(X-1)(X-2\sigma)(X-4\sigma^2)$, ceci conduit dans les deux cas au résultat (ii).
b) Si $\rho\sigma\neq 0$.
Lorsque $\rho\neq 0$, $\sigma=-\frac{1}{2}$, on a $\mu_M(X)=(X^2-1)(X^2-4\rho^2)(X-4\rho^2)$ et comme $\rho=2\eta+1$ on obtient le résultat (iii). De même par symétrie, si $\rho=-\frac{1}{2}$, $\sigma\neq 0$ on

obtient: $\mu_M(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 4\sigma^2)(X - 4\sigma^2)$. Dans le cas $\rho = \sigma = \frac{1}{2}$ on trouve $\mu_M(X) = (X - 1)^5$, c'est-à-dire (iv). Enfin, dans le cas $\rho, \sigma \notin \{0, -\frac{1}{2}\}$ on trouve:

$$\mu_M(X) = (X - 1)(X - 2\rho)(X - 2\sigma)(X - 4\rho^2)(X - 4\sigma^2)(X - 4\rho\sigma)$$

qui conduit au résultat (v).

Deuxième cas: $(x^2 - x)^3 \neq 0$ pour un $x \in \omega^{-1}(1)$.

Alors $\rho, \sigma = \frac{1}{2}$. Dans ce cas l'application E se traduit par la transformation des coordonnées:

$$(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mapsto \begin{pmatrix} 1, 1 + \alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1^2 + \alpha_3, \\ -2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_4, -2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

et le plongement

$$(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mapsto (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^2, \alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_4, \alpha_1^3, \alpha_1\alpha_3, \alpha_5)$$

permet de définir sur K^{11}, comme auparavant, la linéarisée de Haldane, dont le polynôme minimal est $(X - 1)^6$, on retrouve le résultat (v). □

4. LES QUATRE TYPES DE TRAIN ALGÈBRES DE DEGRÉ 4

Par le procédé de gamétisation, on a montré dans Mallol and Varro (2003) que l'étude des train algèbres de degré 4 se ramène à celle des train algèbres (les ω-identités sont données pour des éléments de poids 1): $x^4 = \delta x^2 + (1 - \delta)x$ ou $x^4 = 2x^3 + \delta x^2 - (1 + \delta)x$, que l'on résume sous la forme

$$x^4 = \varepsilon x^3 + \delta x^2 + (1 - \varepsilon - \delta)x \qquad \text{où } \varepsilon \in \{0, 2\}.$$

Dans ce travail on notera $T_{\varepsilon,\delta}$ le train polynôme associé, on a

$$T_{\varepsilon,\delta}(X) = (X - 1)(X^2 + (1 - \varepsilon)X + (1 - \varepsilon - \delta)),$$

qui admet $\frac{1}{2}$ pour racine si et seulement si $\delta = \frac{7-6\varepsilon}{4}$ et a une racine double si et seulement si $\delta = \frac{4-(1+\varepsilon)^2}{4}$.

En croisant les conditions d'existence d'un idempotent et de présence de train racines doubles, on obtient quatre types d'algèbres:

Type	Valeurs de ε, δ	Idempotent (existence)	Train polynôme $T_{\varepsilon,\delta}$
1	$\varepsilon \in \{0, 2\}$ $\delta \neq -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}$	oui	$X^3 - \varepsilon X^2 - \delta X - (1 - \varepsilon - \delta)$
2	$\varepsilon = 0$ $\delta = \frac{3}{4}$	oui	$(X - 1)(X + \frac{1}{2})^2$
3	$\varepsilon = 0$ $\delta = \frac{7}{4}$	oui/non	$(X - 1)(X - \frac{1}{2})(X + \frac{3}{2})$
4	$\varepsilon = 2$ $\delta = -\frac{5}{4}$	oui/non	$(X - 1)(X - \frac{1}{2})^2$

5. CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES DE TYPES 1 ET 2

Dans ce travail, on posera pour tout $a, b, c, d \in A$:

$$[a, b, c] = a(bc) + b(ac) + c(ab)$$
$$[a, b, c, d] = a[b, c, d] + b[a, c, d] + c[a, b, d] + d[a, b, c].$$

On donne une caractérisation des train algèbres de degré 4 appartenant aux types 1 et 2.

Théorème 3. *Soient $\varepsilon, \delta \in K$, $\varepsilon \in \{0, 2\}$, $\delta \neq \frac{7-6\varepsilon}{4}$ et A une K-algèbre commutative. Les trois énoncés suivants sont équivalents*:

i) *A est une train algèbre de degré 4 de type 1 ou 2, de polynôme $T_{\varepsilon,\delta}$;*
ii) *Il existe un idéal S de A, $e \in A$ et $z \in S$ tels que $\operatorname{codim} S = 1$, $e \notin S$, $e^2 = e$, $z \neq 0$, $e(ez) + (1-\varepsilon)ez + (1-\varepsilon-\delta)z = 0$ et pour tout $(x, y) \in A \times S$:*

$$2e(e(ey)) + (1-2\varepsilon)e(ey) + (1-\varepsilon-2\delta)ey - (1-\varepsilon-\delta)y = 0 \tag{1}$$
$$x[x, y, y] + y[y, x, x] = \varepsilon\omega(x)[x, y, y] + \delta\omega(x)^2y^2; \tag{2}$$

iii) *Il existe $e \in A$, des sous-espaces U, Z de A tels que $e \neq 0$, $e^2 = e$, $U = \{x; 2ex = x\}$, $Z = \{x; e(ex) + (1-\varepsilon)ex + (1-\varepsilon-\delta)x = 0\}$ avec $A = Ke \oplus U \oplus Z$, $Z \neq \{0\}$, $U^2 \subset Z$, $Z^2 \subset Z$, $UZ \subset U \oplus Z$ et pour tout $x \in A$, $y, z \in U \oplus Z$:*

$$[x, x, y, z] = 2\varepsilon\omega(x)[x, y, z] + 2\delta\omega(x)^2yz. \tag{3}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit A une train algèbre de degré 4 de type 1 ou 2, alors A admet une pondération ω et possède un idempotent e. Posons $S = \ker\omega$. En polarisant deux fois l'identité $xT_{\varepsilon,\delta}(x) = 0$, on obtient les relations suivantes, vraies pour tout $x \in A$ et $y, t \in S$:

$$x^3y + x[x, x, y] = \varepsilon\omega(x)[x, x, y] + 2\delta\omega(x)^2xy + (1-\varepsilon-\delta)\omega(x)^3y \tag{4}$$
$$[x, x, y]t + [x, x, t]y + 2x[x, y, t] = 2\varepsilon\omega(x)[x, y, t] + 2\delta\omega(x)^2yt \tag{5}$$

En posant $x = e$ dans l'identité (4) on trouve la relation (1), en faisant $t = y$ dans (5) on trouve l'identité (2).

Il existe $z \in S$, $z \neq 0$ tel que $e(ez) + (1-\varepsilon)ez + (1-\varepsilon-\delta)z = 0$. En effet, si $\ker(L_e^2 + (1-\varepsilon)L_e + (1-\varepsilon-\delta)id) = \{0\}$ alors de (1) on déduit que $S = \ker(2L_e - id)$. Soit $u \in \ker(2L_e - id)$, en posant $(x, y, t) = (e, u, u)$ dans (5) on obtient $e(eu^2) + (1-\varepsilon)eu^2 + (1-\varepsilon-\delta)u^2 = 0$; donc $u^2 = 0$ il en résulte que $(e+u)^2 = e + u$ pour tout $u \in S$, c'est-à-dire que A serait train de degré 2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Des hypothèses $e \notin S$ et S est un idéal de codimension 1, il découle que l'application ω définie sur $Ke \oplus S$ par $\alpha e + z \mapsto \alpha$ est une pondération de A de noyau S. De l'identité (1) on déduit la décomposition $S = U \oplus Z$ où $U = \ker(2L_e - id)$, $Z = \ker(L_e^2 + (1-\varepsilon)L_e + (1-\varepsilon-\delta)id)$ et par hypothèse $Z \neq \{0\}$. En prenant $x = e$ et $y = u \in U$ dans (2) on obtient $U^2 \subset Z$, on en déduit que $Z \neq \{0\}$ sinon $U^2 = \{0\}$ et A serait train de degré 2. L'inclusion $UZ \subset S$ est immédiate. Montrons que $Z^2 \subset Z$, pour cela prenons dans (2), $x = e$ et $y \in Z$, on obtient:

$$[e(ey^2) - \varepsilon ey^2 + (2\varepsilon + \delta - 2)y^2] + [2e(y(ey)) - y(ey)] = 0.$$

On a y^2, $y(ey) \in S$, soient $y^2 = u + z$ et $y(ey) = u' + z'$ où $u, u' \in U$ et $z, z' \in Z$, de l'identité qui précède il vient : $(6\varepsilon + 4\delta - 7)u = 0$; or $4\delta \neq 7 - 6\varepsilon$, donc $u = 0$ et $y^2 \in Z$. Enfin, la relation (3) s'obtient en polarisant (2) suivant y.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se fait sans difficulté avec les techniques usuelles. □

6. ÉTUDE DES TRAIN ALGÈBRES DE TYPE 1

Remarquons d'abord que si (A, ω) est une train K-algèbre de polynôme $T_{\varepsilon,\delta}$ et L un corps contenant K, alors l'extension de A sur L, notée A_L, est pondérée par $\omega_L : \alpha \otimes x \mapsto \alpha\omega(x)$ et A_L munie de cette pondération est une train L-algèbre de polynôme $T_{\varepsilon,\delta}$.

En particulier, si le corps L contient K et les racines du train polynôme $T_{2,\delta}$, l'étude de la train algèbre associée à $T_{2,\delta}$ peut se ramener à celle de polynôme $T_{2,-1}$.

Proposition 4. *Toute train algèbre de degré* 4 *de polynôme* $T_{2,\delta}$ $(\delta \neq -\frac{5}{4})$ *est la gamétisée de la train algèbre de polynôme* $X(X-1)^2$.

Démonstration. En effet la gamétisée au taux $\gamma = 1 + \frac{1}{\rho - \sigma}$ de la train identité $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$ (cf. Mallol and Varro, 2003) est $xT_{2,\delta}(x) = 0$. □

L'extension de l'algèbre permet de raffiner la décomposition de Peirce et de simplifier la relation (3) du Théorème 3.

Théorèm 5. *Soit* K *un corps contenant les racines* ρ, σ *du polynôme* $X^2 + (1-\varepsilon)X + (1 - \varepsilon - \delta)$ *où* $\varepsilon, \delta \in K$, $\varepsilon \in \{0, 2\}$, $\delta \notin \{-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}\}$. *Sont équivalents*:

i) (A, ω) *est une train algèbre sur* K *de polynôme* $T_{\varepsilon,\delta}$;
ii) *Il existe un idempotent* e *de* A *qui induit sur* A *la décomposition de Peirce* $\ker\omega = U \oplus V \oplus W$, *où* $U = \{x; 2ex = x\}$, $V = \{x; ex = \rho x\}$, $W = \{x; ex = \sigma x\}$ *vérifient*

$$\begin{array}{lll} V \neq \{0\}, & W \neq \{0\}, & \\ U^2 \subset V \oplus W, & V^2 \subset W, & W^2 \subset V, \\ UV \subset U \oplus W, & UW \subset U \oplus V, & VW = \{0\} \end{array}$$

et pour tout $x \in A$, $y, z \in \ker\omega$

$$[x, y, y, z] = \varepsilon\omega(x)[y, y, z]. \tag{6}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) La structure algèbrique de $\ker\omega$ est prouvée dans Guzzo (1994), la relation (6) découle de la polarisation de (3).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Il est clair que $V \oplus W = Z$, et les inclusions de l'énoncé (iii) du Théorème 3 découlent sans peine des hypothèses. Il reste à établir la relation (3), compte tenu de (6) cela se réduit à prouver que $[e, e, y, z] = 2\varepsilon[e, y, z] + 2\delta yz$ pour tout $y, z \in \ker\omega$, et on a va montrer qu'elle découle de la structure algèrique. Si $(y, z) \in V \times W$ cela vient de $VW = \{0\}$; pour les autres cas, si $y, z \in U \cup V \cup W$ on a $ey = \lambda y$, $ez = \mu z$, $yz = y' + z'$ $ey' = \lambda' y'$, $ez' = \mu' z'$ où $y', z' \in U \cup V \cup W$, donc

$$[e, e, y, z] - 2\varepsilon[e, y, z] - 2\delta yz = \varphi(\lambda, \mu, \lambda')y' + \varphi(\lambda, \mu, \mu')z'$$

où on a posé $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 2\lambda^2 + 2\mu^2 + \lambda + \mu + 2(\lambda + \mu + \nu)(\nu - \varepsilon) - 2\delta$. Soit $P(X) = X^2 + (1 - \varepsilon)X + (1 - \varepsilon - \delta)$, on trouve: $\varphi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \rho) = \varphi(\frac{1}{2}, \rho, \frac{1}{2}) = 2P(\rho)$ donc $\varphi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sigma) = \varphi(\frac{1}{2}, \sigma, \frac{1}{2}) = 2P(\sigma)$, $\varphi(\frac{1}{2}, \rho, \sigma) = \varphi(\frac{1}{2}, \sigma, \rho) = 2P(\rho) + 2P(\sigma)$ et $\varphi(\rho, \rho, \sigma) = 4P(\rho) + 2P(\sigma)$ d'où $\varphi(\sigma, \sigma, \rho) = 2P(\rho) + 4P(\sigma)$. □

Désormais on se place sous les hypothèses du théorème ci-desssus. On fera souvent référence à l'identité suivante obtenue par linéarisation de (6):

$$L(x, y, z, t) : [x, y, z, t] = \varepsilon\omega(x)[y, z, t], \qquad (\forall x \in A,\ y, z, t \in \ker\omega) \tag{7}$$

Proposition 6. *Pour toute train algèbre de degré* 4 *de type* 1 *on a*:

i) $V^3 = W^3 = \{0\}$;
ii) $UV^2 \subset U$, $UW^2 \subset U$;
iii) *Si U est de dimension finie, il existe une base $(u_1, \dots, u_p)$ de U telle que $u_k V \subset K\langle u_0, \dots, u_{k-1}\rangle + W$ et $u_k W \subset K\langle u_0, \dots, u_{k-1}\rangle + V$ pour tout $1 \le k \le p$, avec $u_0 = 0$.*

Démonstration. Le résultat (i) est prouvé dans Guzzo (1994). Montrons (ii), soient $y \in V$ et $z \in U$ on a yz, y^2, $y(yz) \in U + W$ et $y^2 z \in U + V$, alors en posant $y^2 z = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$ il découle de $L(e, y, y, z)$ que $(2\rho - 1)v = 0$ d'où $v = 0$. De manière analogue $UW^2 \subset U$. Quant à (iii), pour tout $z \in V \cup W$ on note Λ_z la composée de la restriction à U de L_z avec la projection de $\ker\omega$ sur U de noyau $V \oplus W$; soit E l'ensemble de ces applications. Pour tout $u \in U$, $v, v' \in V$ et $w, w' \in W$; les relations $L(e, u, v, v')$, $L(e, u, w, w')$ et $L(e, u, v, w)$ donnent

$$\begin{aligned}(1 - 2\sigma)(\Lambda_v\Lambda_{v'} + \Lambda_{v'}\Lambda_v) + (2\rho - 1)\Lambda_{vv'} &= 0\\ (1 - 2\rho)(\Lambda_w\Lambda_{w'} + \Lambda_{w'}\Lambda_w) + (2\sigma - 1)\Lambda_{ww'} &= 0\\ (1 - 2\rho)\Lambda_v\Lambda_w + (1 - 2\sigma)\Lambda_w\Lambda_v &= 0.\end{aligned}$$

Pour $v = v'$ la première donne $2(1 - 2\sigma)\Lambda_v^2 + (2\rho - 1)\Lambda_{v^2}^2 = 0$ et en posant $w = w' = v^2$ dans la seconde, on trouve $\Lambda_{v^2}^2 = 0$, on en déduit que $\Lambda_v^4 = 0$; on a de même $\Lambda_w^4 = 0$. Il en résulte d'une part que E est un ensemble d'applications nilpotentes et d'autre part que pour tout Λ_z, $\Lambda_{z'} \in E$ il existe $\lambda \in K$ tel que $\Lambda_z\Lambda_{z'} + \lambda\Lambda_{z'}\Lambda_z \in E$. Alors d'après un théorème donné dans (Jacobson, 1962, p. 34) tous les éléments de E sont triangularisables dans une même base $(u_1, \dots, u_p)$ de U, d'où le résultat. □

A partir de maintenant on se place en dimension finie.

Définition 7. On appelle présentation de A, le triplet $(\dim U, \dim V, \dim W)$.

Les algèbres de présentation $(0, n, m)$ serviront de valeurs intiales à une méthode récursive de classification des train algèbres de degré 4 de type 1 basée sur le résultat (iii) de la Proposition 6.

Proposition 8. *Les algèbres de présentation* $(0, n, m)$ *sont isomorphes à l'une des* 9 *classes suivantes, dont les produits définis sur une base* $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* V *et* $(w_p)_{1\leq p\leq m}$ *de* W *sont en fonction des valeurs de* $(\dim V^2, \dim W^2)$:

I. *Cas* $(0, 0)$
tous les produits nuls.

II. *Cas* $(1, 0)$

a) $v_1^2 = w_1$
b) *pour chaque* $2 \leq k \leq n$: $v_1^2 = w_1$, $v_i^2 = \alpha_i w_1$, *où* $\alpha_i \in K^*$, $2 \leq i \leq k$.

III. *Cas* $(0, 1)$

a) $w_1^2 = v_1$
b) *pour chaque* $2 \leq k \leq m$: $w_1^2 = v_1$, $w_p^2 = \beta_p v_1$, *où* $\beta_p \in K^*$, $2 \leq p \leq k$.

IV. *Cas* $(1, 1)$
$v_1^2 = w_1$, $v_i v_j = \alpha_{ij} w_1$, $w_m^2 = v_n$, $w_r w_s = \beta_{rs} v_n$, *pour tout* $1 \leq i, j \leq n-1$, $2 \leq r, s \leq m$ *et* $(i, j) \neq (1, 1)$, $(r, s) \neq (m, m)$.

V. *Cas* $(p, 0)$, $p \geq 2$
$v_1^2 = w_1$, $v_2^2 = w_2$ *et* $v_i v_j = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} w_k$, $1 \leq i, j \leq n$, $(i, j) \neq (1, 1), (2, 2)$.

VI. *Cas* $(0, q)$, $q \geq 2$
$w_1^2 = v_1$, $w_2^2 = v_2$ *et* $w_r w_s = \sum_{k=1}^{q} \beta_{rsk} v_k$, $1 \leq r, s \leq m$, $(r, s) \neq (1, 1), (2, 2)$.

VII. *Cas* $(p, 1)$, $p \geq 2$
$v_1^2 = w_1$, $v_2^2 = w_2$, $v_i v_j = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} w_k$, $w_m^2 = v_n$, $w_r w_s = \beta_{rs} v_n$, *pour tout* $1 \leq i$, $j < n$, $p < r, s \leq m$ *tels que* $(i, j) \neq (1, 1), (2, 2)$ *et* $(r, s) \neq (m, m)$.

VIII. *Cas* $(1, q)$, $q \geq 2$
$v_n^2 = w_m$, $v_i v_j = \alpha_{ij} w_m$; $w_1^2 = v_1$, $w_2^2 = v_2$, $w_r w_s = \sum_{k=1}^{q} \beta_{rsk} v_k$, *pour tout* $q < i$, $j \leq n$, $1 \leq r, s < m$ *tels que* $(i, j) \neq (n, n)$ *et* $(r, s) \neq (1, 1), (2, 2)$.

IX. *Cas* (p, q), $p, q \geq 2$
$v_1^2 = w_1$, $v_2^2 = w_2$, $v_i v_j = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} w_k$, $w_{m-1}^2 = v_{n-1}$, $w_m^2 = v_n$, $w_r w_s = \sum_{k=1}^{q} \beta_{rsk} v_{n-q+k}$, *pour tout* $1 \leq i, j \leq n-q$, $p+1 \leq r, s \leq m$ *avec* $(i, j) \neq (1, 1), (2, 2)$ *et* $(r, s) \neq (m-1, m-1), (m, m)$.

Démonstration. Montrons le cas II (le cas III est analogue), il existe $v \in V$ tel que $v^2 \neq 0$, posons $w = v^2$, alors $Kw \oplus V$ est une nilalgèbre de degré 3 de présentation $(n, 1)$ donc est isomorphe à l'une des n classes d'algèbres dont les produits sont définis sur une base $(v_1, \ldots, v_n, w_1)$ par $v_1^2 = w_1$, ou pour chaque entier $2 \leq k \leq n$, par $v_1^2 = w_1$ et $v_i^2 = \alpha_i w_1$, avec $\alpha_i \in K^*$, $2 \leq i \leq k$ (cf. Mallol et al., 2005, Prop. 12), on termine en complétant w_1 en une base $(w_1, \ldots, w_m)$ de W.

Montrons le cas IX (la méthode est analogue pour les autres cas). Soit $(a_1^2, \ldots, a_p^2)$ une base de V^2 et $(b_1^2, \ldots, b_q^2)$ une base de W^2. Le système $\{a_1, a_2, b_1^2, \ldots, b_p^2\}$ est libre dans V; en effet si $a_1 \in Lin\{a_2, b_1^2, \ldots, b_q^2\}$ alors $a_1^2 \in Lin\{a_2^2\}$. De même $\{b_1, b_2, a_1^2, \ldots, a_p^2\}$ est libre dans W. Ensuite on pose $v_1 = a_1$, $v_2 = a_2$ et pour tout $1 \leq k \leq q$, $v_{n+1-k} = b_k^2$ puis on complète ce système en une base

$(v_i)_{1\le i\le n}$ de V. De façon analogue on note $w_{m-1} = b_2$, $w_m = b_1$ et pour chaque entier $1 \le k \le p$, $w_k = a_k^2$ et on complète ce système en une base $(w_r)_{1\le r\le m}$ de W. Il en résulte que l'on a: $v_1^2 = w_1$, $v_2^2 = w_2$, $w_{m-1}^2 = v_{n-1}$, $w_m^2 = v_n$, que pour tout $1 \le i \le n$ et $n - q + 1 \le j \le n$ on a $v_i v_j = 0$; que si $1 \le r \le m$ et $1 \le s \le p$ alors $w_r w_s = 0$ et que dans tous les autres cas $v_i v_j \in Lin\{w_1, \dots, w_p\}$ et $w_r w_s \in Lin\{v_{n-q+1}, \dots, v_n\}$. □

Pour illustrer les résultats de structure obtenus, on va classifier ce type d'algèbres en dimension ≤ 4.

Remarque 9. On a vu au Théorème 5 que les sous-espaces V et W jouent des rôles symétriques, quitte à permuter les racines ρ et σ, on peut donc toujours se ramener à des présentations telles que $\dim W \le \dim V$ et quand $\dim W = \dim V$ à celles vérifiant $\dim W^2 \le \dim V^2$.

Nous adopterons cette convention dans les classifications. Dans ce cas:

$$1 \le \dim W \le \frac{1}{2}\dim(V \oplus W) \le \dim V$$

et si $\dim W = \dim V$

$$0 \le \dim W^2 \le \frac{1}{2}\dim(V^2 \oplus W^2) \le \dim V^2 \le \dim W.$$

Les deux résultats suivants sont très utiles:

Proposition 10. *On a les implications*: $\dim V^2 = \dim W \Rightarrow W^2 = \{0\}$ *et* $\dim W^2 = \dim V \Rightarrow V^2 = \{0\}$.

Démonstration. Ne pose pas de difficulté. □

Proposition 11. *Soit A de présentation* $(1, n, m)$, *on a pour tout* $u \in U$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$: $u(uv) = uv^2 = (uv)v' = 0$, $u(uw) = uw^2 = (uw)w' = 0$ *et* $(uv)w = (uw)v = 0$.

Démonstration. D'après (iii) de la Proposition 6, de la dimension de U résulte que $UV \subset W$ et $UW \subset V$ d'où $(UV)V = \{0\}$ et $(UW)W = \{0\}$. Ensuite de $L(e, u, u, v)$ il vient $(2\rho - 1)u(uv) - \rho u^2 v + v(eu^2) = 0$, comme $u^2 v$, $v(eu^2) \in W$ on a $u(uv) = 0$. De $UW \subset V$ on déduit que $uv^2 \in V$ mais d'après (ii) de la Proposition 6 on a aussi $UV^2 \subset U$ donc $uv^2 = 0$. Enfin de $L(e, u, v, w)$ on obtient $(2\rho - 1)(uv)w + (2\sigma - 1)(uw)v = 0$ avec $(uv)w \in V$ et $(uw)v \in W$ d'où $(uv)w = (uw)v = 0$. □

Dans les classifications qui suivent, les produits nuls sont omis.

Proposition 12. *A isomorphisme près, les algèbres de dimension* ≤ 4 *sont*:

En présentation $(0, 1, 1)$:

$$v^2 = \theta w, \theta \in \{0, 1\}.$$

En présentation $(0, 2, 1)$:

$$v_1^2 = \theta w, \qquad \theta \in \{0, 1\}.$$
$$v_1^2 = w, \qquad v_2^2 = \alpha w, \quad (\alpha \in K^*).$$
$$w^2 = v_1.$$

En présentation $(1, 1, 1)$:

1) $v^2 = \theta w,\ uv = \theta' w,\ (\theta, \theta' \in \{0, 1\})$;
2) $u^2 = v,\ v^2 = \theta w,\ uv = \theta' \alpha w,\ (\theta, \theta' \in \{0, 1\}, \alpha \in K^*)$;
3) $u^2 = w,\ v^2 = \theta \alpha w,\ uv = \theta' w,\ (\theta, \theta' \in \{0, 1\}, \alpha \in K^*)$;
4) $u^2 = v + w,\ v^2 = \theta \alpha w,\ uv = \theta' \beta w,\ (\theta, \theta' \in \{0, 1\}, \alpha, \beta \in K^*)$.

Démonstration. Les présentations $(0, 1, 1)$ et $(0, 2, 1)$ sont traitées à la Proposition 8. En présentation $(1, 1, 1)$, soit $(u, v, w) \in U \times V \times W$, la sous-algèbre $K\langle e, v, w\rangle$ est de présentation $(0, 1, 1)$ on a donc $v^2 = \theta w$, $\theta \in \{0, 1\}$. Posons $u^2 = \lambda v + \mu w$, $uv = \alpha w$, $uw = \beta v$, alors de $u(uv) = 0$ et $uv^2 = 0$ (Prop. 11) il vient $\alpha\beta = 0$ et $\theta\beta = 0$. Remarquons tout de suite que si $\theta = 0$, l'étude du cas $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ se ramène par échange des espaces V et W à celui du cas $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Quand $\alpha = \beta = 0$, on a quatre cas (correspondants à $\theta' = 0$): si $\lambda = \mu = 0$ on trouve 1); si $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ par le changement de base $(u, v, w) \mapsto (u, \lambda v, \lambda^2 w)$ on obtient 2); si $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ en faisant le changement $(u, v, w) \mapsto (u, v, \mu w)$ on a 3); si $\lambda\mu \neq 0$ le changement de base $(u, v, w) \mapsto (u, \lambda v, \mu w)$ aboutit à 4). Lorsque $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ on a quatre cas (pour lesquels $\theta' = 1$): pour $\lambda = \mu = 0$ le changement de base $(u, , v, w) \mapsto (\alpha^{-1} u, v, w)$ donne 1); pour $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ le changement de base $(u, v, w) \mapsto (\lambda^{-1} u, \lambda^{-1} v, \lambda^{-2} w)$ aboutit à 2); si $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ par le changement de base $(u, v, w) \mapsto (\mu^{-1} u, \alpha^{-1} v, \mu^{-1} w)$ on obtient 3); enfin si $\lambda\mu \neq 0$ par $(u, v, w) \mapsto (u, \lambda v, \mu w)$ on arrive à 4). $\square$

7. ÉTUDE DES TRAIN ALGÈBRES DE TYPE 2

Ces algèbres ont pour train polynôme $T_{0,3/4}(X) = X^3 - \frac{3}{4}X^2 - \frac{1}{4}X$. Les algèbres d'Etherington, i.e. les algèbres vérifiant $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$, appartiennent à cette classe. La linéarisée de la train identité (3) fournit la relation suivante, à laquelle nous ferons souvent appel:

$$R(x, x', y, z) : [x, x', y, z] = \frac{3}{2}\omega(x)\omega(x')yz, \qquad \forall x, x' \in A,\ y, z \in \ker \omega$$

L'introduction du morphisme Φ défini sur $\ker \omega$ par $\Phi = L_e + \frac{1}{2} id$, permet de préciser la structure du sous-espace $Z = \ker \Phi^2$ de la décomposition de Peirce de ces algèbres. En se servant du fait que pour $t \in \ker \omega$ on a: $et = \Phi(t) - \frac{1}{2}t$, à partir de $R(e, e, y, z)$ on obtient une identité vérifiée par Φ pour tout $y, z \in \ker \omega$:

$$\Phi^2(yz) + y\Phi^2(z) + z\Phi^2(y) + \Phi(y\Phi(z) + z\Phi(y)) = 2\Phi(yz) + y\Phi(z) + z\Phi(y) \qquad (8)$$

Théorèm 13. *Les énoncés suivants sont équivalents*:

i) (A, ω) *est une train algèbre de polynôme* $T_{0,3/4}$;
ii) *Il existe un idempotent e de A qui induit sur A la décomposition de Peirce* $\ker\omega = U \oplus V \oplus W$, *où* $U = \{x; 2ex = x\}$, $V = \{x; 2ex = -x\}$, *W un supplémentaire de V dans Z telle que*

$$\begin{array}{lll} V \neq \{0\}, & & \\ U^2 \subset V \oplus W, & V^2 \subset V, & W^2 \subset V \oplus W, \\ UV \subset U \oplus V, & UW \subset U \oplus V \oplus W, & VW \subset V \oplus W \end{array}$$

avec en plus quand $W = \{0\}$, *au moins l'une des trois conditions suivantes*:

$$V^2 \neq \{0\} \text{ ou } UV \subsetneq U \text{ ou } u(uv) \neq 0 \text{ pour un } (u, v) \in U \times V.$$

Et pour tout $x \in A$, $y, z \in \ker\omega$:

$$[x, x, y, z] = \frac{3}{2}\omega(x)^2 yz \tag{9}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si A est une train algèbre de polynôme $T_{0,3/4}$, d'après le Théorème 3 (iii), il existe un idempotent $e \in A$ qui induit la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus Z$ où $U = \ker(L_e - \frac{1}{2}id)$ et $Z = \ker(L_e + \frac{1}{2}id)^2$ avec $Z \neq \{0\}$. Soit $V = \ker(L_e + \frac{1}{2}id)$ et W un supplémentaire de V dans Z. On définit $\Phi = L_e + \frac{1}{2}id$ sur $\ker\omega$, on a $\ker\Phi = V$, $\Phi^2(Z) = 0$ donc $\Phi(W) \subset V$, par conséquent si $V = \{0\}$ alors $Z = \{0\}$. Montrons les inclusions, du Théorème 3 il vient: $U^2 \subset Z$, $W^2 \subset Z^2 \subset Z$, $UW \subset UZ \subset U + Z$ et $VW \subset Z^2 \subset Z$; il reste donc à établir les inclusions $V^2 \subset V$ et $UV \subset U + V$. Si on prend $y = z \in V$ dans la relation (8), comme $\Phi(z) = 0$ et $z^2 \in V$ il reste $\Phi(z^2) = 0$ donc $z^2 \in V$. Si $y \in U$ et $z \in V$ la relation (8) devient $\Phi^2(yz) = \Phi(yz)$, donc $yz \in \ker(\Phi - id) \oplus \ker\Phi = U \oplus V$.

Enfin, si $W = \{0\}$ et si l'on suppose que $V^2 = \{0\}$, $UV \subset U$ et $u(uv) = 0$ pour tout $(u, v) \in U \times V$. Comme on a $U^2 \subset V$, alors pour tout $u \in U$ il découle de $R(e, u, u, u)$ que $u^3 = 0$. De manière analogue, on trouve en partant de $R(e, u, v, v)$ que $v(vu) = 0$. Ces deux résultats joints à l'hypothèse $u(uv) = 0$ permettent de montrer par un simple calcul que pour $x = e + u + v$ on a $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, c'est-à-dire que A est train de degré 3.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par application du Théorème 3. $\square$

Les résultats suivants seront utilisés pour les classifications.

Proposition 14. *Dans toute train algèbre A de degré* 4 *de type* 2, *on a*:

i) *V est une zéro-algèbre ou une nilalgèbre de nilindice* 3;
ii) *Si* $\dim A < \infty$ *alors* $\dim A \geq 3$ *et* $\dim W \leq \frac{1}{2}\dim(Z) \leq \dim V$;
iii) *Pour tout* z, z' *dans* Z: $2\Phi(zz') + z\Phi(z') + z'\Phi(z) = 0$, $\Phi(z)\Phi(z') = 0$ *et* $z\Phi(z') \in V$;
iv) *Si* $(w_1, \ldots, w_p)$ *est une base de W alors* $\{\Phi(w_1), \ldots, \Phi(w_p)\}$ *est une famille libre de V qui engendre une zéro-algèbre*;
v) *Si U est de dimension finie, il existe une base* $(u_1, \ldots, u_p)$ *de U qui vérifie*: $u_1 V \subset V$ *et* $K\langle u_1, \ldots, u_k\rangle V \subset K\langle u_1, \ldots, u_{k-1}\rangle \oplus V$ *pour chaque* $2 \leq k \leq p$.

Démonstration. i) Soit $v \in V$, de $V^2 \subset V$ et $R(e, v, v, v)$ il vient $v^3 = 0$.

ii) La restriction de Φ à Z a pour noyau V et vérifie $\Phi^2 = 0$, on en déduit que $\dim Z \leq 2 \dim V$ d'où $\dim W \leq \dim V$ et $2 \dim W \leq \dim Z$. Il en résulte que si $\dim A = 2$, comme $V \neq \{0\}$ on a $\dim W = 0$, $\dim U = 0$ et $\dim V = 1$ mais alors $V^2 = \{0\}$, ce qui est exclus d'après le Théorème 13.

iii) Si $z, z' \in Z$, en appliquant Φ à la relation (8), comme $\Phi^2 = 0$ sur Z, on a: $\Phi(z\Phi(z') + z'\Phi(z)) = 0$; ceci entraäne: $2\Phi(zz') + z\Phi(z') + z'\Phi(z) = 0$. En remplaÙant dans cette identité z par $\Phi(z)$, puis z' par $\Phi(z')$ on obtient $2\Phi(\Phi(z)z') + \Phi(z)\Phi(z') = 0$ et $2\Phi(z\Phi(z')) + \Phi(z)\Phi(z') = 0$, en ajoutant ces deux dernières égalités on obtient $\Phi(z)\Phi(z') = 0$ d'où $\Phi(z\Phi(z')) = 0$ soit $z\Phi(z') \in V$.

iv) La famille $\{\Phi(w_1), \ldots, \Phi(w_p)\}$ est libre: en effet si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Phi(w_i) = 0$ on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i w_i \in V \cap W = \{0\}$. Il résulte de (iii) que l'algèbre engendrée par $\{\Phi(w_1), \ldots, \Phi(w_p)\}$ est une zéro-algèbre.

v) On va montrer d'abord que pour tout $v \in V$, l'opérateur L_v est nilpotent. Par $R(v, v, v, z)$ on trouve que $v^3 z + v(v^2 z) + 2v(v(vz)) = 0$ quel que soit $z \in \ker \omega$, comme $v^3 = 0$ on a donc $L_v L_{v^2} + 2L_v^3 = 0$ $(*)$. On en déduit que si $v \in V$ vérifie $v^2 = 0$ on a $L_v^3 = 0$. Sinon, comme $(v^2)^2 = 0$ d'après ce qu'on vient de voir on a $L_{v^2}^3 = 0$, et en se servant de $(*)$ il vient:

$$8L_v^7 = 4L_v^4(2L_v^3) = -4L_v^5 L_{v^2} = -2L_v^2(2L_v^3)L_{v^2} = 2L_v^3 L_{v^2}^2 = -L_{v^2}^3 = 0$$

Soit $E = \{\Lambda_v; v \in V\}$ où Λ_v dénote la composée de la restriction de L_v à U par la projection de $U + V$ sur U. Pour $v, v' \in V$ et $u \in U$, de $R(e, v, v', u)$ il vient: $\Lambda_v \Lambda_{v'} + \Lambda_{v'} \Lambda_v = \Lambda_{vv'}$. Il en résulte par (Jacobson, 1962, p. 34) que tous les éléments de E triangularisent dans une même base $(u_1, \ldots, u_p)$ de U, ce qui prouve le résultat. $\square$

Proposition 15. *Nous avons*:

i) $W^2 \subset V \Leftrightarrow w\Phi(w) = 0, \forall w \in W$;
ii) $UW \subset U \oplus V \Leftrightarrow U\Phi(W) \subset U$;
iii) $VW \subset V \Leftrightarrow V\Phi(W) = \{0\}$;
iv) *Si* $\dim W = 1$ *et* $VW \subset V$ *alors* $W^2 \subset V$.

Démonstration. i) Soit $w \in W$; du (iii) de la Proposition 14 on a: $\Phi(w^2) + w\Phi(w) = 0$ donc $w\Phi(w) = 0 \Leftrightarrow \Phi(w^2) = 0$.

ii) Pour $u \in U$ et $w \in Z$, la relation (8) devient: $\Phi^2(uw) + \Phi(u\Phi(w)) = \Phi(uw) + u\Phi(w)$. On en déduit que $u\Phi(w) \in \ker(\Phi - id) = U$ si et seulement si on a $uw \in \ker(\Phi^2 - \Phi) = U \oplus V$.

iii) Soient $v \in V$, $w \in W$, de la Proposition 14 (iii) on a: $2\Phi(vw) + v\Phi(w) = 0$ et donc $vw \in V \Leftrightarrow v\Phi(w) = 0$.

iv) Soit $w \in W$ et $w^2 = v + \alpha w$ alors de $w^4 = 0 = w(wv) + \alpha wv + \alpha^2 v + \alpha^3 w$ et $VW \subset V$ il vient $\alpha = 0$. $\square$

Le triplet $(\dim U, \dim V, \dim W)$ est appelé présentation d'une algèbre de type 2. Peut-on trouver une algèbre de présentation (p, q, r) pour tout triplet (p, q, r) où $q \geq p$?

Théorèm 16. *La présentation d'une train algèbre de degré* 4 *de type* 2 *est de la forme* (p, q, r) *avec* $p + q + r = \dim A - 1$, $q \geq r$ *et* $(q, r) \neq (1, 0)$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour tout $p \geq 0$ il n'existe pas de train algèbre de degré 4 de type 2 de présentation $(p, 1, 0)$. Pour $p = 0$ le résultat résulte de la Proposition 14 (ii). Supposons qu'il existe une algèbre de présentation $(p, 0, 1)$ avec $p \geq 1$. Soit $v \in V$ on a $v^2 = 0$ car V est nil de dimension 1. D'après la Proposition 14 (v), il existe une base $(u_1, \ldots, u_p)$ de U telle que $u_1 v = \alpha_1 v$ et $u_k v = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} u_i + \alpha_k v$ pour chaque $k \geq 2$. De la relation $R(e, u_k, u_k, v)$ il vient $\alpha_k^2 v = 0$ donc $UV \subset U$. Posons $u_i u_j = \beta_{ij} v$ où $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq p$. On a $u_i^4 = \beta_{ii}(u_i(u_i v)) = 0$ mais d'après le Théorème 13 il existe un entier i_0 tel que $u_{i_0}(u_{i_0} v) \neq 0$ donc $\beta_{i_0 i_0} = 0$. Alors la relation $R(u_{i_0}, u_{i_0}, u_{i_0}, u_j)$ s'écrit $u_{i_0}(u_{i_0}(u_{i_0} u_j)) = 0$ soit $\beta_{j i_0} u_{i_0}(u_{i_0} v) = 0$, par conséquent on a $\beta_{j i_0} = 0$ donc $u_j u_{i_0} = 0$ pour tout $j \neq i_0$. Avec ceci la relation $R(u_{i_0}, u_{i_0}, u_j, u_k)$ fournit $u_{i_0}(u_{i_0}(u_j u_k)) = \beta_{jk} u_{i_0}(u_{i_0} v) = 0$ donc $\beta_{jk} = 0$ pour tout $1 \leq j, k \leq p$ et $j \neq i_0$, de ceci et de $\beta_{jk} = \beta_{kj}$, $\beta_{i_0 i_0} = 0$ il découle que $\beta_{jk} = 0$ pour tout $1 \leq j, k \leq p$. Ainsi $U^2 = \{0\}$ donc $U(UV) = \{0\}$. Finalement on a obtenu que $V^2 = U(UV) = \{0\}$, $UV \subset U$ ce qui contredit le Théorème 13.

Il reste à voir que pour tout triplet d'entiers (p, q, r) tels que $(q, r) \neq (1, 0)$ il existe une algèbre de présentation (p, q, r). On vérifie sans peine que si $q \geq 2$, l'algèbre définie sur $U = K\langle u_1, \ldots, u_p \rangle$, $V = K\langle v_1, \ldots, v_q \rangle$ par $v_1^2 = v_q$ et tous les autres produits nuls, est de présentation $(p, q, 0)$. Et pour $q \geq r \geq 1$, l'algèbre définie sur $U = K\langle u_1, \ldots, u_p \rangle$, $V = K\langle v_1, \ldots, v_q \rangle$ et $W = K\langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ par $e w_i = -\frac{1}{2} w_i + v_i$ et les autres produits nuls est de présentation (p, q, r). □

On va maintenant appliquer les résultats de structure obtenus à la classification de ces algèbres en dimension ≤ 4. Dans ces classifications les produits nuls sont omis.

Proposition 17. *A isomorphisme près, les algèbres de type* 2 *de dimension* ≤ 4 *sont*:

présentation $(0, 2, 0)$: $v_1^2 = v_2$.
présentation $(0, 1, 1)$: $w^2 = \alpha v$ $(\alpha \in K)$.
présentation $(0, 3, 0)$: $v_1^2 = v_3$.
$v_1^2 = v_3$, $v_2^2 = \alpha v_3$, $(\alpha \in K^*)$.
présentation $(0, 2, 1)$: $w^2 = v_2$.
$v_2^2 = v_1$, $w^2 = v_2$, $v_2 w = \alpha v_1$, $(\alpha \in K)$.
$v_2^2 = \alpha v_1$, $w^2 = \beta v_1$, $v_2 w = \gamma v_1$, $(\alpha, \beta, \gamma \in K)$.
présentation $(1, 2, 0)$: $u^2 = \alpha v_1 + \beta v_2$, $u v_1 = v_2$, $(\alpha, \beta \in K)$.
$u v_1 = \alpha v_2$, $v_1^2 = v_2$, $(\alpha \in K)$.
présentation $(1, 1, 1)$: $uw = \alpha v$, $w^2 = \beta v$, $(\alpha, \beta \in K)$.
$u^2 = v$, $uw = \alpha v$, $w^2 = \beta v$, $(\alpha, \beta \in K)$.
$u^2 = v + w$, $uw = \alpha v$, $w^2 = \beta v$, $(\alpha, \beta \in K)$.

Démonstration. Soit A une train algèbre de degré 4 de type 2 de dimension ≤ 4.

Si $\dim A = 3$, on a seulement deux présentations car d'après le Théorème 16 la présentation $(1, 1, 0)$ n'existe pas. La pré sentation $(0, 2, 0)$ est obtenue dans Mallol et al. (2005) puisque dans ce cas V est nil d'indice 3. Pour la présentation $(0, 1, 1)$, on utilise la Proposition 14(iv): on prend $w \in W$, on pose $v = \Phi(w)$ on a $v^2 = 0$ donc $vw \in V$ (Prop. 14(iii)) d'où $w^2 \in V$ (Prop. 15(iv)), ce qui entraäne $vw = 0$ (Prop. 15(i)).

Si $\dim A = 4$, la présentation $(2, 1, 0)$ étant impossible (Thm. 16), on a 4 présentations:

Présentation $(0, 3, 0)$. On a $V^2 \neq \{0\}$ donc V est nil d'indice 3 de dimension 3, sa classification est donnée dans Mallol et al. (2005).

Présentation $(0, 2, 1)$. Soit $w \in W$ on pose $v_1 = \Phi(w)$ on a $v_1^2 = 0$ et $v_1 w \in V$ (Prop. 14(iv)), on complète v_1 en une base (v_1, v_2) de V. L'identité $R(e, v_1, v_1, v_2)$ fournit $v_1(v_1v_2) = 0$, on en déduit que si $v_1v_2 = \beta v_1 + \gamma v_2$ alors $v_1(v_1v_2) = \gamma v_1 v_2$ d'où $v_1v_2 = \beta v_1$. En procédant de même, on déduit de $v_2^3 = 0$ que $v_2^2 = \alpha v_1$. Avec ceci, $R(e, v_1, v_2, v_2)$ s'écrit $v_2(v_2v_1) = 0$ d'où $\beta = 0$ soit $v_1v_2 = 0$, il en résulte que $VW \subset V$ (Prop. 15(iii)) donc $v_2 w \in V$ et $w^2 \in V$ (Prop. 15(iv)) par conséquent $v_1 w = 0$ (Prop. 15(i)). Posons $w^2 = \lambda v_1 + \mu v_2$ et $wv_2 = \lambda' v_1 + \mu' v_2$, de $w^4 = 0$ on déduit que $\mu\mu' w v_2 = 0$. On a $\mu\mu' = 0$, car si $\mu\mu' \neq 0$ alors $wv_2 = 0$ et donc $\mu' = 0$. Si $\mu \neq 0$ on a obtenu: $v_2^2 = \alpha v_1$, $w^2 = \lambda v_1 + \mu v_2$ et $wv_2 = \lambda' v_1$; dans le cas $\alpha = 0$ le changement de base $(v_1, v_2, w) \mapsto (v_1, w^2, w)$ donne l'algèbre $w^2 = v_2$ et les autres produits nuls; dans le cas $\alpha \neq 0$ le changement de base $(v_1, v_2, w) \mapsto (\alpha\mu^2 v_1, w^2, w)$ donne $v_2^2 = v_1$, $w^2 = v_2$ et $v_2 w \in Kv_1$. Si $\mu = 0$ alors $w^3 = 0$ et $R(w, w, w, v_2)$ conduisent à $\mu' = 0$ on a donc $v_2^2, w^2, v_2 w \in Kv_1$.

Présentation $(1, 2, 0)$. On va considérer deux cas:

a) Si $V^2 = \{0\}$, pour $u \in U$ et $v \in V$ on a $u^2 \in V$ et $uv \in V$ (Prop. 14(v)) et la relation $R(e, u, u, v)$ entraäne $u(uv) = 0$, c'est-à-dire que la restriction de L_u à V est nilpotente d'ordre 2, cette application n'étant pas nulle car on aurait $UV \subset V$ ce qui est exclus d'après le Théorème 13, il existe une base (v_1, v_2) de V telle que $uv_2 = 0$, $uv_1 = v_2$.

b) Si $V^2 \neq \{0\}$, alors $Ke + V$ est de présentation $(0, 2, 0)$, on a vu qu'il existe une base (v_1, v_2) de V telle que $v_1^2 = v_2$. Soit $u \in U$, on a $uv_1, uv_2 \in V$, de la relation $R(e, u, v_1, v_1)$ on tire $uv_2 + v_1(v_1u) = 0$, ce résultat joint à la relation $R(u, u, v_1, v_1)$ aboutit à $uv_2 = 0$ donc $v_1(v_1u) = 0$ d'où l'on déduit que $uv_1 \in Kv_2$.

Présentation $(1, 1, 1)$. On a $V^2 = \{0\}$ car V est une nilalgèbre de dimension 1. Soit $u \in U$, on considère deux cas:

a) Si $u^2 \in V$. Soit $w \in W$, on pose $v = \Phi(w)$ on a $v^2 = 0$, $vw \in V$, il s'ensuit que $w^2 \in V$ (Prop. 15(iv)) d'où $vw = 0$ (Prop. 15(i)). On a $u^2 = \alpha v$, si $\alpha = 0$, la relation $R(e, u, u, v)$ fournit $u(uv) = 0$ comme $uv \in V$ ceci implique que $uv = 0$; et si $\alpha \neq 0$, de $u^4 = 0$ on déduit facilement que $uv = 0$. On en déduit que $uw \in U + V$ (Prop. 15(ii)).

b) Si $u^2 \notin V$ alors $(u^2) \neq 0$, posons $v = \Phi(u^2)$ et $w = u^2 - v$. On a $v = \Phi(w)$, $v^2 = 0$ et $vw \in V$, alors $w^2 \in V$ d'où $vw = 0$. □

ACKNOWLEDGMENTS

Cristián Mallol, Avec l'appui du FONDECYT. N[a] 1030294, CONICYT, Chile.

Michelle Nourigat and Richard Varro, Avec l'appui du FONDECYT Coop. Int. N[a] 7050242, CONICYT, Chile.

REFERENCES

Etherington, I. M. H. (1939). Genetic algebras. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 59:242–258.

Etherington, I. M. H. (1940/1945). Commutative train algebras of ranks 2 and 3. *J. London Math. Soc.* 15:136–149. *Corrigendum ibid.* 20:238.

Etherington, I. M. H. (1941). Non-associative algebra and the symbolism of genetics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh B* 61:24–32.

Gutierrez Fernandez, J. C. (2000). Principal and plenary train algebras. *Comm. Alg.* 28:653–667.

Guzzo, H. Jr. (1994). The Peirce decomposition for commutative train algebras. *Comm. Alg.* 22:5745–5757.

Jacobson, N. (1962). *Lie Algebras*. New York: Interscience.

Lopez-Sanchez, J., Rodriguez, E. (1996). On train algebras of rank 4. *Comm. Alg.* 24:439–445.

Lynn Reed, M. (1997). Algebras structures of genetic inheritance. *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series) 34(2):107–131.

Lyubich, Ju. I. (1992). *Mathematical Structures in Population Genetics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Mallol, C., Varro, R. (2002). Algèbres de Mutation et Train algèbres. *East-West J. of Math.* 4(1):77–85.

Mallol, C., Varro, R. (2003). Gamétisation d'algèbres pondérées. *Journal of Algebra* 261:1–18.

Mallol, C., Nourigat, M., Varro, R. (2005). Sur la classification des Nilalgèbres commutatives de Nilindice 3. *Comm. Alg.* 33:4149–4158.

Mc Hale, D., Ringwood, G. (1983). Haldane linearisation of baric algebras. *J. London Math. Soc.* 28:17–26.

Worz-Busekros, A. (1980). *Algebras in Genetics*. Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 36. New York: Springer-Verlag.