JOURNAL OF ALGEBRA **183,** 826–836 (1996)
ARTICLE NO. 0240

Dérivations dans les algèbres de Bernstein

M. Teresa Alcalde, César Burgueño, and Cristián Mallol*

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de La Frontera, Casilla 54-D, Temuco, Chile

and

Richard Varro

Département de Mathématiques et Informatique Appliquées, Université de Montpellier III, BP 5043, 34032 Montpellier, Cedex 1, France

Communicated by E. Kleinfeld

Received June 26, 1995

Nous étudions l'algèbre Der(A) d'une algèbre de Bernstein à l'aide des transformations issues des décompositions de Peirce. Nous étudions la structure des dérivations quand les morphismes de Peirce sont des automorphismes. Nous construisons Aut(A) et Der(A) pour quelques types de ces algèbres, en particulier dans la dimension 4.

1. INTRODUCTION

La notion d'algèbre de Bernstein a été introduite par P. Holgate (cf. [4]); plusieures études ont été faites sur ce sujet et leur structure est assez bien connue (cf. [1, 7, 11]). Cependant, il n'en est pas de même en ce qui concerne le groupe des automorphismes et l'algèbre des dérivations. Par rapport aux automorphismes, on peut trouver quelques résultats dans [1] et, plus récemment, une certaine caractérisation est proposée dans [9]. De

* Subventionné par: Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (1930173 et 1950778) et Universidad de La Frontera (9326, 9516), Chile.

0021-8693/96 $18.00

plus, dans [2] on fait une approche de $\mathrm{Aut}(A)$ à partir des transformations de Peirce; nous suivons ici la même méthode par rapport à $\mathrm{Der}(A)$. Dans cette Introduction, où nous rappellons certains résultats, on se réfère à [2].

1.1. Soient K un corps, $\mathrm{car}(K) \neq 2$, A une K-algèbre commutative et ω: $A \to K$ une pondération non nulle. A est une algèbre de Bernstein d'ordre k, si

$$x^{[k+2]} = \omega(x)^{2^k} x^{[k+1]}, \qquad \forall x \in A \text{ où } x^{[1]} = x \text{ et } x^{[k+1]} = \left(x^{[k]}\right)^2.$$

1.2. Si A est une algèbre de Bernstein d'ordre 1, $\mathrm{Ip}(A) = \{x^2/\omega(x) = 1\}$. La décomposition de Peirce relative à $e \in \mathrm{Ip}(A)$ est donnée par $A = Ke \oplus B$ où $B = \mathrm{Ker}(\omega)$ et $B = U \oplus V$ avec $U = \{x/ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V = \{x/ex = 0\}$ avec les relations $U^2 \subset V$, $V^2 \subset U$ et $UV \subset U$.

1.3. De la polarisation de l'identité $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$ et de l'application de celle-ci à la décomposition de Peirce, on obtient les relations suivantes, fort utiles:

(a) $x^2(xy) = 0$, $\forall x \in B$, $y \in A$.

(b) $s(uv) + u(sv) = (sv)(uv) = (uv)(uw) = 0 \quad \forall s, u \in U, \ \forall v, w \in V$.

(c) $UV^2 = U^2V^2 = \{0\}$.

(d) $s(ut) + u(ts) + t(su) = 0$, $\forall s, u, t \in U$ (identité de Jacobi).

1.4. A l'aide de ces relations on établit que $\mathrm{Ip}(A) = \{e_s = e + s + s^2/s \in U\}$. Les sous-espaces propres relatifs à l'idempotent e_s sont:

$$U_s = \{u_s = u + 2su/u \in U\} \qquad \text{et} \qquad V_s = \left\{v_s = v - 2(s + s^2)v/v \in V\right\}.$$

1.5. Le passage entre les décompositions $Ke \oplus U \oplus V$ et $Ke_s \oplus U_s \oplus V_s$ est donné par les transformations de Peirce, applications linéaires bijectives définies par T_s: $A \to A$, $T_s(\lambda e + u + v) = \lambda e_s + u_s + v_s$. On note $P = \{T_s/s \in U\}$ l'ensemble de Peirce associé à l'idempotent e. On a:

(a) $P \subset \mathrm{Aut}(A) \Leftrightarrow U^2V = \{0\}$ et $v(vU) = \{0\}$, $\forall v \in V$.

(b) $P < \mathrm{Aut}(A) \Leftrightarrow$ (a) et $U(UV) = U^3 = \{0\}$.

1.6. Soit $F_s = \{f \in \mathrm{Aut}(A)/f(e_s) = e_s\}$, $s \in U$, famille de sous-groupes de $\mathrm{Aut}(A)$, avec $F = F_0$. Si $P < \mathrm{Aut}(A)$, $F_s = \mathrm{int}_s(F)$, où int_s est l'automorphisme intérieur associé à T_s; de plus, $P \triangleleft \mathrm{Aut}(A)$ et $\mathrm{Aut}(A) \simeq F \bowtie U$, où $\bowtie$ denote le produit semi-direct; dans ces conditions on a les équivalences:

$$F \triangleleft \mathrm{Aut}(A) \Leftrightarrow F_s = F, \forall s \in U \Leftrightarrow F|_U = \{\mathrm{Id}\} \Leftrightarrow F|_{\mathrm{Ip}(A)} = \{\mathrm{Id}\}.$$

2. L'ALGÈBRE Der(A)

Soient $e \in \mathrm{Ip}(A)$ et $Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce de A relative à cet idempotent. Le résultat suivant est bien connu:

2.1. PROPOSITION. *Si $d \in \mathrm{Der}(A)$, alors $d(e) \in U$. De plus, si $d(e) = 0$, $d(U) \subset U$ et $d(V) \subset V$.*

Démonstration. De $e^2 = e$ on a $2ed(e) = d(e)$, d'où $d(e) \in U$. Pour le reste, comme $d(e) = 0$, si $ex = \lambda x$ on a $ed(x) = \lambda d(x)$.

Soit $DP = \{\partial T_s / s \in U\}$ avec $\partial T_s = T_s - \mathrm{Id} - 2L_s^2$, où $T_s \in P$ est la transformation de Peirce associée à s et L_s le produit par s; comme $T_0 = \mathrm{Id}$ il s'ensuit que $\partial T_0 = 0$. On peut dire que les transformations de Peirce T_s sont des "quasi-automorphirmes" d'algèbre (car $T_s(ex) = T_s(e)T_s(x)$ et $T_s(u^2) = T_s(u)^2$, donc quasi-multiplicatives); dans le même sens, les applications ∂T_s sont des "quasi-dérivations." Ceci sera justifié par la suite.

Soient $s \in U$ et $K(V, s)$ le sous-espaces engendré par les éléments $\lambda e + v$ avec $\lambda \in K^*$ et tels que $\lambda s = 2sv$.

2.2. PROPOSITION. *Pour tout $s \in U$, on a:*

(a) *$\partial T_s(e) = s$, $\partial T_s(u) = 2su + s^2u$ et $\partial T_s(v) = -2(s + s^2)v$, $u \in U$ et $v \in V$.*

(b) *$K(V, 0) = Ke \oplus V$. Si $s^2 \neq 0$ alors $K(V, s) = \{0\}$.*

(c) *$\mathrm{Ker}(\partial T_s) = K(V, s) \oplus (U \cap U_s) \oplus (V \cap V_s)$.*

Démonstration. (a) Découle directement de la définition de ∂T_s et du fait que $s^2u = -2s(su)$ et $s(sv) = 0$, pour tout $u \in U$ et $v \in V$ (cf., 1.3(c), 1.3(d)).

(b) La première affirmation est immédiate et la séconde découle de l'identité $\lambda s^2 = 2s(sv) = 0$ (1.3(b)).

(c) Si $\lambda e + u + v \in \mathrm{Ker}(\partial T_s)$, alors $\lambda s + 2su + s^2u - 2(s + s^2)v = 0$, d'où, en prenant les termes de U et de V dans la décomposition de Peirce (1.2),

$$\lambda s + s^2u - 2(s + s^2)v = 0 \qquad \text{et} \qquad su = 0.$$

De $su = 0$ on déduit que $T_s(u) = u$, d'où $u \in U \cap U_s$. Quant à $\lambda s + s^2u - 2(s + s^2)v = 0$, on a d'abord $s^2u = 0$, car $su = 0$ (1.3(d)). Si $\lambda = 0$, alors $2(s + s^2)v = 0$ donc $T_s(v) = v$ c'est à dire, $v \in V \cap V_s$. Enfin, si $\lambda \neq 0$, alors $s^2 = 0$ (car $\lambda s^2 = 2s((s + s^2)v) = 0$ (1.3(b) et 1.3(c)) d'où $\lambda s = 2sv$, i.e. $\lambda e + v \in K(V, s)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\partial T_s) \subset K(V, s) \oplus (U \cap U_s) \oplus (V \cap V_s)$. La réciproque se fait sans difficulté.

2.3. COROLLAIRE. $\operatorname{Ker}(\partial T_s) \cap I_P = \Phi \Leftrightarrow s \neq 0$.

Démonstration. Soit $e_t = e + t + t^2$ un idempotent. Si $\partial T_s(e_t) = 0$, alors $st = 0$ et $s = 2st^2$ (2.2(b)); par (1.3(d)) il s'ensuit que $s = 0$.

Pour tout $s \in U$ on pose $\Delta_s = \{\delta_s \in \operatorname{Der}(A)/\delta_s(e_s) = 0\}$ avec $\Delta = \Delta_0$.

2.4. PROPOSITION. (a) Δ_s *est une sous-algèbre de Lie de* $\operatorname{Der}(A)$.
(b) $\Delta_s \cap DP = \{0\}$.

Démonstration. (a) Que $[\Delta_s, \Delta_s] \subset \Delta_s$ est immédiat. Montrons (b): si $\partial T_t \in \Delta_s$ alors $\partial T_t(e_s) = 0$ d'oú $t = 0$ (cor. 2.3) donc $\partial T_t = 0$.

Bien que les applications ∂T_s ne sont pas en général des dérivations, avec les relations 1.3 on montre sans difficulté que pour tout $u \in U$, $\partial T_s(eu) = e\partial T_s(u) + u\partial T_s(e)$ et $\partial T_s(u^2) = 2u\partial T_s(u)$. Dans les résultats qui suivent, les relations 1.2 et 1.3 sont constamment utilisées dans les réductions des identités. On a:

2.5. PROPOSITION. $DP \subset \operatorname{Der}(A) \Leftrightarrow P \subset \operatorname{Aut}(A)$.

Démonstration. On va montrer l'équivalence $DP \subset \operatorname{Der}(A) \Leftrightarrow U^2V = v(vU) = \{0\}$, pour tout $v \in V$ (1.5(a)).
Soient $\partial T_s \in DP$ et $v \in V$; on a $e\partial T_s(v) + v\partial T_s(e) = \partial T_s(ev) \Leftrightarrow -2e((s+s^2)v) + sv = 0 \Leftrightarrow s^2v = 0$. De même $2v\partial T_s(v) = \partial T_s(v^2) \Leftrightarrow v((s+s^2)v) = 0 \Leftrightarrow v(sv) = 0$.

2.6. THÉORÈME. *Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(a) $P < \operatorname{Aut}(A)$.

(b) *DP est un idéal de* $\operatorname{Der}(A)$.

(c) *DP est une sous-algèbre de Lie de* $\operatorname{Der}(A)$.

Dans ces conditions

(d) *Il y a un isomorphisme d'algèbres de Lie* $\operatorname{Der}(A) \simeq \Delta \times U$, *l'espace* $\Delta \times U$ *étant muni du produit* $[(\delta, s), (\delta', s')] = ([\delta, \delta'], \delta(s') - \delta'(s))$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Sous ces conditions: $U(UV) = U^2V = U^3 = v(vU) = \{0\}$, pour tout $v \in V$ (1.5(b)) donc $\partial T_s(u) = 2su$ et $\partial T_s(v) = -2sv$, avec $u \in U$ et $v \in V$. Il s'ensuit que $\partial T_s + \partial T_t = \partial T_{s+t}$ et $\lambda\partial T_s = \partial T_{\lambda s}$, $\forall \lambda \in K$, d'où DP est un sous-espace de $\operatorname{Der}(A)$. Or, $d - \partial T_{d(e)} \in \Delta$ pour tout $d \in \operatorname{Der}(A)$, alors par 2.4(b), $\operatorname{Der}(A) = \Delta \oplus DP$. Enfin en calculant sur e, $u \in U$ et $v \in V$ les applications $[\partial T_s, \partial T_t]$ et $[\partial T_s, \delta]$ avec

$\delta \in \Delta$, on obtient $[\partial T_s, \partial T_t] = 0$ et $[\partial T_s, \delta] = \partial T_{-\delta(s)}$, ce qui montre que DP est un idéal de $\mathrm{Der}(A)$.

(b) ⇒ (c) Est immédiat.

(c) ⇒ (a) Il suffit d'établir les conditions équivalentes de (1.5(b)): par hypothèse $DP \subset \mathrm{Der}(A)$, donc par la proposition 2.5 on a $U^2V = v(vU) = \{0\}$, $\forall v \in V$; il reste à montrer que $U^3 = U(UV) = \{0\}$.

Comme DP est un sous-space de $\mathrm{Der}(A)$, pour tout ∂T_s, ∂T_t il existe ∂T_r tel que $\partial T_s + \partial T_t = \partial T_r$. De $(\partial T_s + \partial T_t)(e) = \partial T_r(e)$ on obtient $r = s + t$; puis si $u \in U$, de $(\partial T_s + \partial T_t)(u) = \partial T_{s+t}(u)$ on obtient $s(tu) + t(su) = 0$, d'où $u(st) = 0$ (1.2(d)), donc $U^3 = \{0\}$.

Par ailleurs on a $[\partial T_s, \partial T_t] \in DP$, car DP c'est une sous algèbre de $\mathrm{Der}(A)$. Or, $[\partial T_s, \partial T_t](e) = 0$ (car $U^3 = 0$) donc $[\partial T_s, \partial T_t] \in \Delta$ et forcément $[\partial T_s, \partial T_t] = 0$ (2.4(b)). De ce fait, si $v \in V$, de $[\partial T_s, \partial T_t](v) = 0$ (en tenant compte que $U^2V = 0$) on déduit que $t(sv) - s(tv) = 0$, d'où $s(tv) = 0$ (1.3(b)), donc $U(UV) = \{0\}$.

(d) On sait que $\mathrm{Der}(A) = \Delta \oplus DP$. L'isomorphisme d'algèbres s'établit par $\delta + \partial T_s \to (\delta, s)$.

Dorénavant on se place sous les conditions du théorème 2.6; on rappelle que dans ce cas $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ (cf. [2]).

Le résultat qui suit montre que les algèbres Δ_s sont isomorphes. On sait que $\mathrm{Aut}(A)$ opère su $\mathrm{Der}(A)$ par $d \to \varphi \circ d \circ \varphi^{-1}$. Si $s \in U$, soient int_s l'automorphisme intérieur associé à la transformation de Peirce T_s et ad_s le morphisme sur $\mathrm{Der}(A)$ défini par $\mathrm{ad}_s = [\partial T_s, \ ]$. On a:

2.7. PROPOSITION. *Pour tout $s \in U$:*

(a) $\Delta_s = \mathrm{int}_s(\Delta)$.

(b) $\Delta \cap \Delta_s = \{\delta \in \Delta / \delta(s) = 0\}$.

(c) $\mathrm{Inv}(\mathrm{int}_s) = (\Delta \cap \Delta_s) \oplus DP$.

(d) $\mathrm{int}_s = \mathrm{Id} + \mathrm{ad}_s$.

Démonstration. (a) Comme $T_s(e) = e_s$ forcément $\mathrm{int}_s(\delta)(e_s) = 0$ pour tout $\delta \in \Delta$ et $\mathrm{int}_s^{-1}(\delta_s)(e) = 0$ pour tout $\delta_s \in \Delta_s$ d'où le résultat.

(b) Nous avons $\delta \in \Delta \cap \Delta_s \Leftrightarrow \delta(e_s) = \delta(e) = 0 \Leftrightarrow \delta(e) = \delta(s) = 0$.

(c) Montrons d'abord que $DP \subset \mathrm{Inv}(\mathrm{int}_s)$: un calcul simple montre que $\mathrm{int}_s(\partial T_t)(e) = \partial T_t(e) = t$. Pour ce qui reste on remarque que $\partial T_t|_{\mathrm{Ker}(\omega)} = T_t - \mathrm{Id}$; ceci veut dire (car $\mathrm{int}_s(T_t) = T_t$) que $\mathrm{int}_s(\partial T_t)$ et ∂T_t coincident aussi sur $\mathrm{Ker}(\omega)$, d'où le résultat.

Pour finir, soit $\delta \in \Delta$: si $\mathrm{int}_s(\delta) = \delta$ alors (par 2.3) $\delta \in \Delta_s$. Réciproquement, si $\delta \in \Delta \cap \Delta_s$, alors $\delta(e) = \delta(s) = 0$ (2.7(b)), donc $(\delta \circ T_s)(e) =$

$(T_s \circ \delta)(e) = 0$; puis, $(\delta \circ T_s)(u + v) = \delta(u + 2su + v - 2sv) = \delta(u) + 2s\delta(u) + \delta(v) - 2s\delta(v) = (T_s \circ \delta)(u + v)$ d'où $\delta \circ T_s = T_s \circ \delta$, c'est-à-dire, $\mathrm{int}_s(\delta) = \delta$.

(d) Les résultats (2.7(c)) et $[DP, DP] = \{0\}$ entraînent que $\mathrm{int}_s = \mathrm{Id} + \mathrm{ad}_s$ sur DP. Pour le reste si $\delta \in \Delta$, il suffit de calculer $\mathrm{int}_s(\delta)$ et $\delta + \mathrm{ad}_s(\delta)$ sur e, $u \in U$, $v \in V$, en tenant compte que $T_s^{-1} = T_{-s}$.

2.8. *Remarque*. Les résultats (a) et (d) de la proposition 2.7 nous disent que l'écriture des éléments de Δ_s dans la somme directe $\Delta \oplus DP$ est de la forme $\delta + \partial T_{-\delta(s)}$.

2.9. PROPOSITION. *Sont équivalentes*:

(a) Δ *est un idéal de* $\mathrm{Der}(A)$.

(b) $\Delta(A) \subset V$.

(c) $\Delta(\mathrm{Ip}(A)) = \{0\}$.

(d) $\Delta(U) = \{0\}$.

(e) $\mathrm{int}_s = \mathrm{Id}$, $\forall s \in U$.

Dans ce cas, $DP \simeq \mathrm{Der}(A)/\Delta$ *isomorphisme d'algèbres de Lie*.

Démonstration. (a) ⇒ (b) On a $[\Delta, DP] \subset DP$ (Thm. 2.6). Donc, si Δ est un idéal de $\mathrm{Der}(A)$ forcément $[\Delta, DP] = \{0\}$ (2.4(b)). Il s'ensuit que si $\delta \in \Delta$ et $u \in U$ alors $0 = [\delta, \partial T_u](e) = \partial T_{\delta(u)}(e) = \delta(u)$ d'où si $x = \lambda e + u + v$ alors $\delta(x) = \delta(v)$.

(b) ⇒ (c) Si $\Delta(A) \subset V$ alors $\forall \delta \in \Delta$ et $u \in U$, on a $\delta(u) \in V$ donc $\delta(u) = 0$ (2.1) et, a fortiori, $\delta(u^2) = 0$, d'où $\Delta(\mathrm{Ip}(A)) = \{0\}$.

(c) ⇒ (d) Se fait sans problèmes.

(d) ⇒ (e) Si $\Delta(U) = \{0\}$, alors $\Delta = \bigcap_s \Delta_s$ et $\mathrm{Inv}(\mathrm{int}_s) = \Delta \oplus DP$ (2.7(b) et 2.7(c)) d'où $\mathrm{int}_s = \mathrm{Id}$, $\forall s \in U$.

(e) ⇒ (a) Si $\mathrm{int}_s = \mathrm{Id}$ pour tout $s \in U$, alors $\mathrm{ad}_s = 0$ pour tout $s \in U$ (2.7(d)) d'où $[\Delta, DP] = \{0\}$ donc Δ est un idéal de $\mathrm{Der}(A)$.

On remarque que dans les conditions de la proposition 2.9, si $u \in U$ et $v \in V$, on a: $0 = \delta(uv) = u\delta(v)$ donc $\Delta(A) \subset \mathrm{Ann}_V(U)$.

On finit ce paragraphe en exhibant le lien étroit entre les automorphismes qui fixent l'idempotent et les dérivations qui l'annulent. Soit A de dimension finie:

2.10. THÉORÈME. *F est algébrique et son algèbre de Lie $\mathscr{L}(F)$ est Δ.*

Démonstration. Les techniques utilisées sont celles exposées dans [10]. Soit $\{e_i, 1 \le i \le n\}$ une base de A avec $e = e_1$. L'algébricité de F est donnée par les $\frac{1}{2}n(n + 1)$ équations: $f(e) = e$ et $f(e_i e_j) = f(e_i)f(e_j)$, $i \le j$. Pour ce qui reste, soient $K' = K[\epsilon]$ l'extension de K par ϵ, où $\epsilon^2 = 0$, $A' = K' \otimes_K A$ et F' l'extension respective de F. Si $\delta \in M_n(K)$, on a:

$\delta \in \mathscr{L}(F) \Leftrightarrow \mathrm{Id} + \epsilon\delta \in F'$ (cf. [6, p. 1.4]). Ainsi, de $(\mathrm{Id} + \epsilon\delta)(e) = e$ il résulte $\delta(e) = 0$, donc $\mathscr{L}(\mathscr{F}) = \Delta$.

2.11. COROLLAIRE. *Si* $F \lhd \mathrm{Aut}(A)$ *alors* Δ *est un idéal de* $\mathrm{Der}(A)$.

Démonstration. On a $F|_U = \{\mathrm{Id}\}$ (1.6) d'où $F'|_U = \{\mathrm{Id}\}$. Si $\delta \in \Delta$ alors $\mathrm{Id} + \epsilon\delta \in F'$ donc $(\mathrm{Id} + \epsilon\delta)(u) = u$ d'où $\delta(u) = 0$, $\forall u \in U$. On obtient $\Delta(U) = \{0\}$ ce qui montre que Δ est un idéal (Prop. 2.9).

3. CALCUL DE CERTAINS F ET Δ

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(B)$. Pourque on puisse étendre φ comme automorphisme de A, il faut qu'il existe $s \in U$ tel que $\varphi(u) = \bar{u} + 2s\bar{u}$ et $\varphi(v) = \bar{v} - 2(s + s^2)\bar{v}$, avec $\bar{u} \in U, \bar{v} \in V$ (cf. [1]). Ceci veut dire que les automorphismes de B prolongeables en automorphismes de A sont ceux qui, d'une certaine façon, ont un comportement semblable à celui des transformation de Peirce; parmi ces morphismes on a le groupe: $\mathrm{Aut}_{U,V}(B) = \{g \in \mathrm{Aut}(B)/g(U) \subset U, g(V) \subset V\}$. Ce même type de considérations peuvent être faites par rapport aux dérivations.

On pose: $\mathrm{Der}_{U,V}(B) = \{d \in \mathrm{Der}(B)/d(U) \subset U, d(V) \subset V\}$.

3.1. PROPOSITION. (a) $F \simeq \mathrm{Aut}_{U,V}(B)$, *isomorphisme de groupes*.
(b) $\Delta \simeq \mathrm{Der}_{U,V}(B)$, *isomorphisme de algèbres de Lie*.

Démonstration. Si $f \in F$ alors $f|_B \in \mathrm{Aut}_{U,V}(B)$. Réciproquement, on associe à $g \in \mathrm{Aut}_{U,V}(B)$ l'élément $\bar{g} \in F$ défini par $\bar{g}(e) = e$ et $\bar{g}_B = g$. L'autre équivalence se fait de la même façon.

3.2. COROLLAIRE. (a) *B est une zéro-algèbre telle que* $\dim(U) = p$ *et* $\dim(V) = q$ *alors* $F \simeq GL_p(K) \times GL_q(K)$ *et* $\Delta \simeq M_p(K) \times M_q(K)$.
(b) *Si* $\phi\colon B \to B'$ (*isomorphisme d'algèbres*) *est tel que*: *soit* (i) $\phi(U) = U'$ *et* $\phi(V) = V'$ *ou soit* (ii) $\phi(U) = V'$ *et* $\phi(V) = U'$, *alors les groupes* F *et* F' *sont isomorphes. Dans le deuxième cas forcément* $UV = U'V' = \{0\}$.

Démonstration. L'enoncé (a) ne pose pas de problèmes en tenant compte que $GL_0(K) = \{\mathrm{Id}\}$ et $M_0(K) = \{0\}$. Quant à (b), dans les deux cas l'application $f \to \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ établit un isomorphisme entre $\mathrm{Aut}_{U,V}(B)$ et $\mathrm{Aut}_{U',V'}(B')$. La dernière affirmation en dècoule.

Parmi les algèbres de Bernstein qui vérifient les conditions équivalentes du théorème 2.6, on a:

3.3. PROPOSITION. *Si l'algèbre A est*:

(a) *une extension par idempotent d'une zéro-algèbre, parmi celles-ci, les constantes d'indice* 2 *et les gamétiques*,

(b) *de mutation,*

(c) *normale,*

(d) *de Jordan exceptionnelle,*

alors $\mathrm{Aut}(A) = F \bowtie U$ *et* $\mathrm{Der}(A) = \Delta \times U$.

Démonstration. Il suffit de prouver que les conditions de 1.5(b) sont vérifiées dans chaque cas.

L'assertion (a) est immédiate car $A = Ke \oplus B$ avec $B^2 = \{0\}$. Pour (b) et (c), si A est constante alors $U = \{0\}$; de meme si A est gamétique $V = \{0\}$ (cf. [7]). Dans les deux cas, A est une extension d'une zéro-algèbre. L'assertion (b) est immédiate car dans ce cas $\mathrm{Ker}(\omega)^2 = 0$ (cf. [8]).

Quant à (c) si A est normale alors, $x^2y = \omega(x)xy$, $\forall x,\ y \in A$; ceci est équivalent à $UV = V^2 = \{0\}$ (cf. [11]).

Enfin, si A est de Jordan (déterminée par $x^3 = \omega(x)x^2$) elle vérifie $v(vU) = \{0\}$ (cf. [5]); si de plus l'algèbre est exceptionnelle, elle vérifie l'identité $(xy)^2 = \omega(xy)xy$ (cf. [6]) ce qui est équivalent à $U^2 = 0$.

Nous finirons ce travail par la construction de F et Δ pour quelques algèbres, dans le cas $U, V \neq \{0\}$. Nous avons besoin de:

3.4. Proposition. *Soit A telle que* $v(vU) = \{0\}$, $\forall v \in V$. *Si* $\dim(A) < 5$, *alors P est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(A)$.

Démonstration. Il faut montrer que $U(UV) = U^2V = U^3 = \{0\}$ (1.5(b)). Or, la négation de l'une de ces trois conditions nous fournit quatre éléments libres de $U \oplus V$. En effet, si $U(UV) \neq \{0\}$ soient $u,\ s \in U$ et $v \in V$ tels que $u(sv) \neq 0$; montrons que la famille $\{u, sv, u(sv), v\}$ est libre: si $\alpha u + \beta sv = 0$ alors $\alpha u(sv) + \beta(sv)^2 = 0$; mais $(sv)^2 = 0$ (1.3(b)) d'où $\alpha = 0$ donc $\{u, sv\}$ est une famille libre de U. De même, si $\lambda v + \mu u(sv) = 0$, $\lambda u(sv) + \mu u(s(u(sv))) = 0$; or $-u(s(u(sv))) = u(s(s(uv))) = \frac{1}{2}u(s^2(uv))$ (1.3(b) et 1.3(d)) et comme, $-u(s^2(uv)) = (uv)(us^2) = 0$ (1.3(b)) on a $\lambda = 0$ d'où $\{u(sv), v\}$ est une famille libre de V. De façon analogue on montre que si $U^2V \neq \{0\}$ (resp. si $U^3 \neq \{0\}$) il existe $u \in U$ et $v \in V$ (resp. $s, u \in U$) tels que $\{u, u^2v, u^2, v\}$ est libre (resp. $\{u, us^2, s^2, us\}$ est libre).

Dans [3], T. Cortéz donne la classification des algèbres de dimension 4. Des 21 classes d'isomorphie établies, 8 ne vérifient pas les conditions du théorème 2.6; pour ces algèbres il faut calculer directement le groupe des automorphismes et l'algèbre des dérivations. Les 13 réstantes sont dans la situation de la proposition 3.4; la détermination de $\mathrm{Aut}(A)$ et $\mathrm{Der}(A)$ passe par la construction de F et Δ. Voici la liste de tables de multiplication de noyaux B_i, pour $1 \leq i \leq 13$

$B = U \oplus V, \qquad u, w \in U, \qquad v \in V$

	u^2	w^2	v^2	uw	uv	vw	
B_1	0	0	w	0	0	u	
B_2	0	0	w	0	w	0	
B_3	0	0	0	0	w	0	
B_4	0	0	0	0	0	0	
B_5	0	0	u	0	0	0	
B_6	0	0	0	v	0	0	
B_7	v	0	0	0	0	0	
B_8	v	λv	0	0	0	0	$-\lambda \notin K^2$

$B = U \oplus V, \qquad u \in U, \qquad v, w \in V$

	u^2	w^2	v^2	uw	uv	vw	
B_9	0	0	0	0	0	0	
B_{10}	w	0	0	0	0	0	
B_{11}	0	0	0	0	0	u	
B_{12}	0	u	0	0	0	0	
B_{13}	0	u	λu	0	0	0	$-\lambda \notin K^2$

On rémarque que par des raisons de symétrie des tables de multiplications, on a $B_i \simeq B_{i+5}$, $4 \leq i \leq 8$, les conditions 3.2(b)(ii) étant vérifées. Ainsi pour les mêmes valeurs de i, on a $F_i \simeq F_{i+5}$ et $\Delta_i \simeq \Delta_{i+5}$. Voici les générateurs pour chaque cas:

	F	Δ
1	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha^3 & & \\ & & \alpha^2 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \alpha \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 3\alpha & & \\ & & 2\alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & \beta & \alpha^2 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \alpha \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & & \\ & \beta & 2\alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & \gamma & \alpha\beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix} \alpha\beta \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & & \\ & \gamma & \alpha+\beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & P & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \alpha \neq 0, P \in GL_2(K)$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & P & \\ & & \alpha \end{pmatrix} P \in M_2(K)$
5	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha^2 & \gamma & \\ & & \beta & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \alpha\beta \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2\alpha & \gamma & \\ & & \beta & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$

6	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & \\ & & & \alpha\beta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & \\ & & & \alpha+\beta \end{pmatrix}$
	et $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & \beta & \\ & \alpha & 0 & \\ & & & \alpha\beta \end{pmatrix} \alpha\beta \neq 0$	
7	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & \gamma & \beta & \\ & & & \alpha^2 \end{pmatrix} \alpha\beta \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & & \\ & \gamma & \beta & \\ & & & 2\alpha \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & \varepsilon\lambda\beta & \\ & \beta & -\varepsilon\alpha & \\ & & & \alpha^2+\lambda\beta^2 \end{pmatrix}$ $\varepsilon^2 = 1,$ $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha & -\lambda\beta & \\ & \beta & \alpha & \\ & & & 2\alpha \end{pmatrix}$

Le scalaire λ qui apparait dans la ligne 8 est celui de la table de multiplication de B_8; les autres varient sur K avec les réstrictions indiquées.

Montrons, par exemple, la construction de F_8.

On a: $f(v) = \tau v$, $f(u) = \alpha u + \beta w$ et $f(w) = \gamma u + \delta w$. Comme $f \in \mathrm{Aut}(A)$ on a les conditions suivantes:

(1) $\tau \neq 0$

(2) $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$

(3) $\alpha^2 + \lambda\beta^2 = \tau$

(4) $\gamma^2 + \lambda\delta^2 = \lambda\tau$

(5) $\alpha\gamma + \lambda\beta\delta = 0.$

On rappelle que $-\lambda \notin K^2$, donc $\lambda \neq 0$. Par ailleurs (1) et (3) imposent que $\alpha^2 + \lambda\beta^2 \neq 0$: ceci est vérifié si et seulement si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Maintenant on résout le système:

De (4), $\alpha^2\gamma^2 + \lambda\alpha^2\delta^2 = \lambda\tau\alpha^2$. Mais $\alpha^2\gamma^2 = \lambda^2\beta^2\delta^2$ (5), d'où $\lambda\delta^2 \cdot (\alpha^2 + \lambda\beta^2) = \lambda\tau\alpha^2$, donc (par 3) $\lambda\tau\delta^2 = \lambda\tau\alpha^2$ et comme λ, $\tau \neq 0$, $\delta^2 = \alpha^2$ $(*)$. De même, $\gamma^2 = \lambda\tau - \lambda\alpha^2$ (4 et $(*)$), donc $\gamma^2 = \lambda(\alpha^2 + \lambda\beta^2) - \lambda\alpha^2$ (3); c'est-à-dire $\gamma^2 = \lambda^2\beta^2$ $(**)$. Enfin, de $(*)$ sors que $\delta = \epsilon\alpha$, avec $\epsilon \in \{1, -1\}$; de (5) il s'ensuit que $\alpha\gamma = -\epsilon\alpha\delta\beta$, d'où (à l'aide de $(**)$), $\gamma = -\epsilon\lambda\beta$.

ACKNOWLEDGMENT

Nous remercions les commentaires du referee.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra, et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc.* (3) **58** (1989), 51–68.
2. C. Burgueño et C. Mallol, Morphismes de Peirce et orthogonalité dans les algèbres de Bernstein, *Linear Algebra Appl.* **219** (1995), 179–186.
3. T. Cortéz, Classification of 4-dimensional Bernstein algebras, *Comm. Algebra* **19**, No. 5 (1991), 1429–1443.
4. Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2) **9** (1975), 613–623.
5. A. Labra, C. Mallol, A. Micali, et R. Varro, Sur les algèbres de Bernstein. V. Les algèbres de Bernstein Jordan faibles, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **35** (1992), 359–373.
6. Ju. I. Lyubich, ''Mathematical Structures in Population Genetics,'' Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.
7. C. Mallol, A. Micali, et M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein, IV, *Linear Algebra Appl.* **158** (1991), 1–26.
8. C. Mallol et R. Varro, Les algèbres de mutation, Presented at Third International Conference on Non Associative Algebras, Oviedo, Spain, July 1993.
9. C. Martínez, Isomorphisms of Bernstein algebras, *J. Algebra* **160** (1993), 419–423.
10. J. P. Serre, ''Lie Algebras and Lie Groups,'' Lectures Given at Harvard University, Benjamin, New York, 1965.
11. A. Worz, ''Algebras in Genetics,'' Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1980.