

Аппроксимация траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса α -моделью Лерэ

М.И.Вишик *, Е.С.Тити†, В.В.Чепыжов*

В [1] построена модель турбулентности, названная α -моделью Лерэ, и приведено обоснование ее использования при подсеточном моделировании турбулентных потоков. В настоящей статье изучается связь долговременной динамики α -модели Лерэ с трехмерной системой Навье–Стокса (3D Н.–С.) при $\alpha \rightarrow 0+$. В частности показано, что траекторный аттрактор α -модели Лерэ сходится к траекторному аттрактору 3D системы Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$.

1. Трехмерная α -модель Лерэ с периодическими граничными условиями. Рассматривается следующая система:

$$\partial_t v = \nu \Delta v - P[(u \cdot \nabla)v] + g(x), \quad x \in \mathbb{T}^3 := [\mathbb{R} \bmod (2\pi L)]^3, \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad (2)$$

где $\nu > 0$ — вязкость, и P — проектор Лерэ, который будет определен ниже. Система (1), (2) была введена в [1] (см. также [2, 3]) в качестве подсеточной модели трехмерной турбулентности. В этой системе функция Грина оператора Гельмгольца $I - \alpha^2 \Delta$ выбрана в качестве ядра фильтрации с пространственной шириной α .

Приведем некоторые физические мотивации, оправдывающие интерес к исследованию α -модели Лерэ.

Использование α -системы Лерэ в качестве модели замыкания усредненных уравнений Рейнольдса, описывающих течения в каналах и трубах, приводит в точности к той же системе уравнений что и в α -модели Н.–С. (которую еще называют системой Камассы–Холма с вязкостью, а также осредненной по Лагранжу α -системой Н.–С.) при соответствующих симметриях (см., например, [4, 5, 6]). Поэтому, аналитические решения α -модели Лерэ хорошо согласуются с эмпирическими данными, полученными для турбулентных потоков в каналах и трубах при широком спектре чисел Рейнольдса (см. [4, 5, 6]). Отметим, однако, что Лерэ рассматривал систему (1), (2) с более общим, чем в (2) сглаживающим ядром ϕ_α , $u = \phi_\alpha * v$, для приближения решений 3D системы Н.–С. в \mathbb{R}^3 (см. [7]).

Неизвестными функциями в системе (1), (2) являются векторные поля $v = v(x, t) = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$ и $u = u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$. Внешняя сила $g(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$ считается известной. Предполагается, что средние по \mathbb{T}^3 всех этих функций равны нулю, т.е., $\int_{\mathbb{T}^3} u(x, t) dx = 0$, $\int_{\mathbb{T}^3} v(x, t) dx = 0$ при $t \geq 0$ и $\int_{\mathbb{T}^3} g(x) dx = 0$.

Обозначим через \mathcal{V} пространство, состоящее из тригонометрических вектор-полиномов $y(x) = (y^1(x), y^2(x), y^3(x))$ с периодом $2\pi L$ по $x = (x^1, x^2, x^3)$, причем $\nabla \cdot y = 0$ и $\int_{\mathbb{T}^3} y(x) dx = 0$. Через H и V обозначаются замыкания пространства

*Институт проблем передачи информации, РАН, Москва

†Калифорнийский университет, Ирвайн, США и Научный институт Вейцмана, Реховот, Израиль

\mathcal{V} в нормах $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ пространств $(L^2(\Omega))^3$ и $(H^1(\Omega))^3$, соответственно. P – ортогональный проектор Лерэ на H , $P : (L^2(\Omega))^3 \rightarrow H$. Обозначим $u(t) := u(\cdot, t)$ и $v(t) := v(\cdot, t)$ при $t \geq 0$.

Наряду с α -моделью Лерэ (1), (2) рассматривается ее предельная система при $\alpha = 0$, совпадающая с 3D системой Н.–С., в которой давление исключено стандартным способом (см., например, [8, 9]):

$$\partial_t u = \nu \Delta u - P[(u \cdot \nabla)]u + g(x), \quad x \in \mathbb{T}^3, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

причем $\int_{\mathbb{T}^3} u(x, t) dx = 0$.

Основной результат настоящей статьи заключается в том, что сдвиги по времени $\{T(h), h \geq 0\}$ ($T(h)w(t) = w(t+h)$) ограниченных (в определяемой ниже метрике) семейств решений $B_\alpha = \{v_\alpha(t), t > 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, α -модели Лерэ при $\alpha \rightarrow 0+$ и при $h \rightarrow +\infty$ сходятся (в указанном ниже смысле) к траекторному аттрактору \mathfrak{A} 3D системы Н.–С. (3).

2. Траекторный аттрактор 3D системы Н.–С. Рассматривается семейство \mathcal{K}^+ всех слабых решений $\{u(t), t \geq 0\}$ уравнения (3), обладающих следующими свойствами: 1) $u(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, 2) $u(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству:

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |u(s)|^2 \psi'(s) ds + \nu \int_0^{+\infty} |\nabla u(s)|^2 \psi(s) ds \leq \int_0^{+\infty} \langle g, u(s) \rangle \psi(s) ds \quad (4)$$

при любой скалярной функции $\psi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi(s) \geq 0$ при $s \geq 0$.

Отметим, что любое решение $u(t)$ задачи Коши для (3) с начальным условием $u(0) \in H$, полученное с помощью метода Галеркина, принадлежит \mathcal{K}^+ (см., например, [9]). Следовательно, множество \mathcal{K}^+ , называемое *пространством траекторий* 3D системы Н.–С., не пусто.

Введем банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b = \{w(\cdot) \mid w(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H), \partial_t w(\cdot) \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')\}$$

(здесь V' – сопряженное пространство к V) с нормой

$$\|w\|_{\mathcal{F}_+^b} = \|w\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; V)} + \|w\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} + \|\partial_t w\|_{L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')},$$

где $\|w\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; V)} = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|w(s)\|_V^2 ds$, и аналогично определяется норма в пространстве $L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')$.

Утверждение 1 Пусть $g \in V'$. Тогда: 1) $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^b$; 2) для любой функции $u(\cdot) \in \mathcal{K}^+$ выполнено неравенство

$$\|T(h)u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_0 \|u(\cdot)\|_{L_\infty(0,1; H)}^2 \exp(-\gamma h) + R_0, \quad \gamma = \nu \lambda_1, \quad (5)$$

где λ_1 – первое положительное собственное значение оператора Стокса A в (2), $A = -\Delta$ при периодических граничных условиях, и константы C_0, R_0 зависят только от ν, λ_1 и $\|g\|_{V'}$.

Доказательство этого предложения дано, например, в [9] (см. также [10, 11]).

Введем еще пространство

$$\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = \{w(\cdot) \mid w(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \partial_t w(\cdot) \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V')\}.$$

В этом пространстве задается локальная слабая топология Θ_+^{loc} , которая порождается следующей слабой секвенциальной сходимостью: по определению, последовательность $\{w_n\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ сходится к $w \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ в Θ_+^{loc} при $n \rightarrow +\infty$, если $w_n \rightharpoonup w$ в $L_{2,w}(0, M; V)$, $v_n \rightharpoonup w$ в $L_{\infty,*w}(0, M; H)$ и $w_n \rightharpoonup w$ в $L_{4/3,w}(0, M; V')$ при $n \rightarrow +\infty$ для любого $M > 0$. Очевидно, топологию Θ_+^{loc} можно задать в терминах соответствующих окрестностей (см. [9]). Заметим, что $\mathcal{F}_+^{\text{b}} \subset \Theta_+^{\text{loc}}$, и любой шар $B_R = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{\text{b}} \mid \|w\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} \leq R\}$ в \mathcal{F}_+^{b} является компактом в Θ_+^{loc} .

Полугруппа трансляций $\{T(h)\} := \{T(h), h \geq 0\}$ является непрерывной в топологии Θ_+^{loc} . Кроме того, пространство траекторий \mathcal{K}^+ замкнуто в Θ_+^{loc} . Полугруппа $\{T(h)\}$ отображает \mathcal{K}^+ в себя: $T(h)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$ при всех $h \geq 0$. Напомним, что множество $P \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ называется *притягивающим* для полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$ в топологии Θ_+^{loc} , если для любого ограниченного (в \mathcal{F}_+^{b}) множества $B \subset \mathcal{K}^+$ множество $T(h)B \rightarrow P$ в топологии Θ_+^{loc} при $h \rightarrow +\infty$. Отметим, что имеется непрерывное вложение $\Theta_+^{\text{loc}} \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$ при $1 \geq \delta > 0$. Поэтому $T(h)B \rightarrow P$ сильно в пространстве $L_2(0, M; H^{1-\delta})$ при $h \rightarrow +\infty$ для любого $M > 0$.

Определение 1 Множество $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+$ называется *траекторным аттрактором* полугруппы $\{T(h)\}$ в топологии Θ_+^{loc} , если: 1) \mathfrak{A} ограничено в \mathcal{F}_+^{b} и компактно в Θ_+^{loc} ; 2) \mathfrak{A} строго инвариантно: $T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ при всех $h \geq 0$; 3) \mathfrak{A} является притягивающим множеством для полугруппы $\{T(h)\}$ на \mathcal{K}^+ в топологии Θ_+^{loc} .

Из неравенства (5) следует, что шар $B_{R_1} = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{\text{b}} \mid \|w\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} \leq R_1, R_1 = 2R_0\}$ в \mathcal{F}_+^{b} является притягивающим множеством для полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$ в топологии Θ_+^{loc} . Как указано выше, шар B_{R_1} компактен в пространстве Θ_+^{loc} . Следовательно, по известной теореме об аттракторах полугрупп (см. [9, 12, 13, 14]), непрерывная полугруппа $\{T(h)\}$ на \mathcal{K}^+ обладает компактным в Θ_+^{loc} траекторным аттрактором $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+ \cap B_{R_1} : \mathfrak{A} = \bigcap_{s>0} [\bigcup_{h \geq s} T(h)(\mathcal{K}^+ \cap B_{R_1})]_{\Theta_+^{\text{loc}}}$.

Введем еще понятие ядра \mathcal{K} 3D системы Н.–С. (3). Ядро \mathcal{K} состоит из всех полных решений $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ этой системы, которые удовлетворяют энергетическому неравенству (4) с заменой интервала $(0, M)$ на интервал $(-M, M)$, и, кроме того, $u(\cdot)$ ограничено в пространстве \mathcal{F}^{b} , которое определяется аналогично \mathcal{F}_+^{b} , с заменой полуоси \mathbb{R}_+ на всю ось времени \mathbb{R} . Тогда, очевидно, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}^{\text{b}}$. Сужение ядра \mathcal{K} на \mathbb{R}_+ совпадает с траекторным аттрактором $\mathfrak{A} : \Pi_+ \mathcal{K} = \mathfrak{A}$ ($\Pi_+ w(t) = \{w(t), t \geq 0\}$ для любой функции $\{w(t), t \in \mathbb{R}\}$). Ядро \mathcal{K} компактно в Θ^{loc} , причем топология Θ^{loc} определяется аналогично Θ_+^{loc} с заменой \mathbb{R}_+ на \mathbb{R} .

3. Пространство траекторий α -модели Лерэ. Задача Коши системы (1), (2) обладает, и притом единственным, слабым решением в энергетическом классе функций: $v(\cdot) \in L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$, $\partial_t v(\cdot) \in L_2(0, M; V')$ при любом $M > 0$. Из уравнения (2) получаем, что $u = (I + \alpha^2 A)^{-1} v$. Поэтому искомой функцией системы (1), (2) можно считать функцию $v(x, t)$. В [1] получены основные априорные оценки для этой системы. При $g \in V'$ любое слабое решение $\{v(t), t \geq 0\}$ системы (1), (2) удовлетворяет неравенству (5) с заменой u на v . Следует подчеркнуть, что в этом случае константы C_0 и R_0 не зависят от α . Аналогично пространству \mathcal{K}^+ вводится пространство \mathcal{K}_α^+ слабых решений $\{v_\alpha(t), t \geq 0\}$ α -модели Лерэ. Имеет место вложение $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^{\text{b}}$ при любых α , $0 < \alpha \leq 1$. Кроме того, для любого $v \in \mathcal{K}_\alpha^+$ энергетическое неравенство (5) становится энергетическим равенством с заменой функции u на v , т.е.,

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |v(s)|^2 \psi'(s) ds + \nu \int_0^{+\infty} |\nabla v(s)|^2 \psi(s) ds = \int_0^{+\infty} \langle g, v(s) \rangle \psi(s) ds, \quad (6)$$

для любой функции $\psi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 Пусть имеется последовательность $\{v_{\alpha_n}(t)\} \subset \mathcal{K}_{\alpha_n}^+$ при $n \in \mathbb{N}$, такая, что: 1) $\{v_{\alpha_n}(\cdot)\}$ ограничена в \mathcal{F}_+^b ; 2) при $\alpha_n \rightarrow 0+$ функции $v_{\alpha_n}(\cdot) \rightarrow v(\cdot)$ ($n \rightarrow \infty$) в Θ_+^{loc} . Тогда $v(\cdot)$ является слабым решением 3D системы Н.–С. и $v \in \mathcal{K}^+$.

4. Сходимость ограниченных множеств траекторий α -модели Лерэ к траекторному аттрактору 3D системы Н.–С. при $h \rightarrow +\infty$ и $\alpha \rightarrow 0+$.

Теорема 1 Пусть $B_\alpha = \{v_\alpha(x, t), t \geq 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$ – равномерно ограниченное в \mathcal{F}_+^b семейство траекторий α -модели Лерэ (1), (2): $\|B_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq M$. Тогда

$$T(h)B_\alpha \rightarrow \mathfrak{A} \quad (h \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 0+) \text{ в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad (7)$$

где \mathfrak{A} – траекторный аттрактор 3D системы Н.–С. (3) (см. п.2).

Следствие 1 При выполнении условий теоремы 1 множество $T(h)B_\alpha$ сходится к ядру \mathcal{K} уравнения (3) при $h \rightarrow +\infty$ и при $\alpha \rightarrow 0+$ в топологии пространства $\Theta(-M, M) = \Theta|_{[-M, M]}$ при любом фиксированном $M > 0$.

Очевидно, утверждения, аналогичные сформулированным в теореме 1 и следствии 1, справедливы для равномерно ограниченных семейств траекторий $\tilde{B}_\alpha = (I + \alpha^2 A)^{-1} B_\alpha = \{u_\alpha(x, t), t \geq 0, 0 < \alpha \leq 1\}$ (функции $v \in B_\alpha$ и $u \in \tilde{B}_\alpha$ связаны равенством $u_\alpha = (I + \alpha^2 A)^{-1} v_\alpha$). Например, $T(h)\tilde{B}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}$ ($h \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 0+$) в Θ_+^{loc} .

Следствие 2 Траекторные аттракторы \mathfrak{A}_α α -модели Лерэ при $\alpha \rightarrow 0+$ сходятся к траекторному аттрактору \mathfrak{A} 3D системы Н.–С. в топологии Θ_+^{loc} .

Так как $\Theta_+^{\text{loc}} \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$, $1 \geq \delta > 0$, то указанные выше сходимости имеют место также в сильной метрике пространства $L_2^{\text{loc}}(0, M; H^{1-\delta})$ для любого $M > 0$.

Полученные выше результаты также справедливы для α -модели Н.–С. (также называемой системой Камассы–Холма с вязкостью или осредненной по Лагранжу α -системой Н.–С.) (см., например, [4, 15] и цитированную там литературу).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 02-01-00227), CRDF (грант RM1-2343-MO-02), INTAS (грант 00-899), NSF (грант DMS-0204794), а также стипендией MAOF Совета по высшему образованию Израиля.

Список литературы

- [1] Cheskidov A., Holm D.D., Olson E., Titi E.S. // <http://www.math.uci.edu/~etiti> Preprint. 2003. 1–21.
- [2] Geurts B.J., Holm D.D. // Physica D. 1999. V. 133. 215–269.
- [3] Geurts B.J., Holm D.D. // Phys. Fluids. 2003. V. 15. L13–L16.
- [4] Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. 5338–5341.
- [5] Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. // Phys. Fluids. 1999. V. 11. 2343–2353.
- [6] Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. // Physica D. 1999. V. 133. 49–65.
- [7] Leray J. // Acta Math. 1934. V. 63. P. 193–348.

- [8] R.Temam, *Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1984. 526 p.
- [9] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. AMS Colloquium Publications. Providence: AMS, 2002. V. 49. 363 p.
- [10] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 321. Série I. P. 1309–1314.
- [11] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. N. 10. P. 913–964.
- [12] *Бабин А.В., Вилиш М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
- [13] *Hale J.K.* Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Math. Surveys and Mon. V. 25. Providence: Amer. Math. Soc. 1988. 198 p.
- [14] *Temam R.* Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Applied Mathematics Series. New York: Springer-Verlag, 1988, 1997. V. 68. 648 p.
- [15] *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* // J. Dyn. Dif. Eq., 2002. V. 14, N. 1, P. 1–35.